ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R *désigne l'ensemble des nombres réels.*

Exercice n° 1

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) , notée x_n, et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que pour n assez grand, on a :
$$\frac{Ln\, n}{2n} \leq u_n \leq 2\frac{Ln\, n}{n}$$
(On peut poser $f_n(u) = n\,Ln(1-u) - Ln\,u$, où Ln désigne le logarithme népérien).

3. Montrer que $Ln(u_n)$ est équivalent à $-Ln\,n$ et en déduire que $x_n = 1 - \frac{Ln\,n}{n} + o\left(\frac{Ln\,n}{n}\right)$

Exercice ° 2

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$

Exercice n° 3

Déterminer toutes les fonctions numériques f , continues sur R , qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t) f(t)\,dt$$

Exercice n° 4

Pour n un entier naturel non nul et $x \in R$, on pose $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$
2. Soit g une fonction continue sur R et nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_R g(x) f_n(x)\,dx$

Exercice n° 5

On considère la suite d'intégrales $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x\,dx$,

où $tg(x)$ désigne la tangente de x

1. Trouver une relation de récurrence concernant cette suite.
2. Montrer que la suite I_n est convergente.
3. Trouver un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice n° 6

Buffon (plus connu comme naturaliste) avait posé le problème suivant : « Si on lance une aiguille de longueur l sur un parquet dont les lames sont de largeur a , quelle est la probabilité *p* pour que l'aiguille tombe à cheval sur deux lames ? ».

1. On suppose que $l \leq a$. On note *d* la distance du milieu de l'aiguille à la lame la plus proche et θ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) la mesure de l'angle que fait l'aiguille avec la direction orthogonale à cette lame.

- A quelle condition a-t-on un chevauchement ?
- Calculer *p* (on pourra utiliser la courbe représentative de la fonction $\theta \to \frac{l}{2}\cos\theta$).

2. On suppose $l > a$. Calculer *p* .

Exercice n° 7

Pour $\alpha \in]-1,1[$, on donne l'équation fonctionnelle (E) suivante :

$\forall x \in R, \quad f(x) = (1-x)f(\alpha x)$ où f est une fonction continue.

1. Montrer que si f et g sont deux solutions de (E) qui vérifient $f(0) = g(0)$, alors elles sont égales.

2. Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière sur un intervalle que l'on précisera.