

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1



1. Soient $f(x) = \cos x \ln(\sin x)$ et $g(x) = \cos x \ln(\tan x)$.
 En 0, $\sqrt{x} f(x) \rightarrow 0$ et $f(\pi/2) = 0$, donc f est intégrable sur l'intervalle $]0, \pi/2[$.
 En $\pi/2$, on peut prolonger g par continuité en posant $g(\pi/2) = 0$. En 0, $\sqrt{x} g(x) \rightarrow 0$, donc g est intégrable sur l'intervalle $]0, \pi/2[$.

2.
$$\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\sin x) dx = \int_0^1 \ln u du, \text{ en posant } u = \sin x,$$

et
$$\int_0^1 \ln u du = [u \ln u - u]_0^1 = -1$$

3.
$$\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1-u^2) du = \frac{1}{2} \left[-(1-u) \ln(1-u^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{1+u} du = \ln 2 - 1$$

Exercice n° 2

Soit la fonction gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1. Au voisinage de 0, $e^{-t} t^{x-1}$ est équivalent à t^{x-1} qui est intégrable pour $x > 0$ et l'intégrale est convergente à $+\infty$. Son domaine de définition est R^{+*} .

2. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

3. $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln(1-t/n)}$ qui tend vers e^{-t} .

4. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ d'après les questions précédentes.

Exercice n° 3

Soit $y(x)$ une fonction de classe C^2 sur R . On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0 \text{ avec les conditions : } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = -1$$

1. Soit $y(x) = -xe^{-x^2/2}$, $y'(x) = e^{-x^2/2}(x^2 - 1)$, $y''(x) = e^{-x^2/2}(3x - x^3)$ et l'équation différentielle précédente est vérifiée ainsi que les conditions. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (sans tenir compte des conditions initiales) est un espace vectoriel de dimension 2 et en fixant les deux conditions, on obtient une unique solution.
2. On suppose que f est solution de l'équation

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t) dt$$



$$\text{Alors } f(x) = -1 - \int_0^x 2xf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt$$

$$\text{On a } f(0) = -1 \text{ et } f \text{ est dérivable avec } f'(x) = -2 \int_0^x f(t) dt - 2xf'(x) + xf'(x)$$

La fonction $y: x \rightarrow x \int_0^x f(t) dt$ est donc solution de l'équation différentielle

$y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0$ avec les conditions initiales précédentes. D'après la première question $y(x) = -xe^{-x^2/2}$ et $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$

Exercice n° 4

Pour $k > 1$ et $x \in R$ positif, on pose

$$f_k(x) = \frac{((k-1)x+1)^{k/k-1} - kx - 1}{k}$$

et

$$f_k^*(y) = \sup_{x \in R} (xy - f_k(x))$$

1. Pour $k = 2$, $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $f_k^*(y) = \sup_y (xy - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}y^2$. Cette borne supérieure est atteinte pour $x = y$.

2. Etude de la convexité de $f_k(x)$. On a : $k f'_k(x) = k((k-1)x+1)^{k/k-1} - 1$. Posons $u = ((k-1)x+1)^{k/k-1} - 1$, on obtient : $u' = ((k-1)x+1)^{-k/k-1} > 0$, la dérivée seconde de $f_k(x)$ étant strictement positive, la fonction est convexe. (Comme $k > 1$ et $x \in \mathbb{R}$ positif, la racine est bien définie).

3. Calcul de $f_k^*(y)$ pour tout $k > 1$. Soit $g(x) = xy - f_k(x)$, alors

$$g'(x) = y - f'_k(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{(y+k)^{k-1} - 1}{k-1} \text{ et } f_k^*(y) = \frac{(1+y)^k - ky - 1}{k(k-1)}$$



Exercice n° 5

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et $a \in A$. On pose,

$$T(A, a) = \{u \in \mathbb{R}^2 / \exists (x_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \rightarrow a, \lambda_n(x_n - a) \rightarrow u\}$$

1. $(0,0) \in T(A, a)$, il suffit de prendre $x_n = a$ et $\lambda_n = 1$.
2. Soit $u \in T(A, a)$, $\forall \mu > 0$, $\mu \lambda_n(x_n - a) \rightarrow \mu u$ et $\mu u \in T(A, a)$, donc cet ensemble est stable par homothétie positive.
3. Montrons que $T(A, a)$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit u^i une suite de points de $T(A, a)$ et $u = \lim_i u^i$. Comme $u^i \in T(A, a)$, $\exists \lambda_{p_i}^i > 0$, $\exists x_{p_i}^i \in A$, $x_{p_i}^i \rightarrow a$, $\lambda_{p_i}^i(x_{p_i}^i - a) \rightarrow u^i$. Pour tout n , $\exists k_n > 0$ tel que $|\lambda_{k_n}^n(x_{k_n}^n - a) - u^n| < \frac{1}{n}$ et alors $x_{k_n}^n \rightarrow a$, $\lambda_{k_n}^n(x_{k_n}^n - a) \rightarrow u$ et $u \in T(A, a)$, ce qui montre que $T(A, a)$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

4. Montrons que $T(A, a)$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ si A est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Soient $u, v \in T(A, a)$ et $0 < \lambda < 1$:

$$\exists (u_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, u_n \rightarrow a, \lambda_n(u_n - a) \rightarrow u$$

$$\exists (v_n) \in A, \exists \alpha_n > 0, v_n \rightarrow a, \alpha_n(v_n - a) \rightarrow v \text{ et}$$

$$\lambda \lambda_n(u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n(v_n - a) \rightarrow \lambda u + (1-\lambda)v.$$

Par ailleurs,

$$\lambda \lambda_n(u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n(v_n - a) = (\lambda \lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n) \left(\frac{\lambda \lambda_n u_n + (1-\lambda)\alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n} - a \right), \text{ ou encore,}$$

$$\lambda \lambda_n(u_n - a) + (1-\lambda)\alpha_n(v_n - a) = \beta_n(w_n - a) \text{ avec}$$

$$\beta_n(w_n - a) \rightarrow \lambda u + (1-\lambda)v,$$

$w_n \in A$, car A est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$,

$$w_n = \frac{\lambda \lambda_n u_n + (1-\lambda)\alpha_n v_n}{\lambda \lambda_n + (1-\lambda)\alpha_n} \rightarrow a \quad \text{car } \|w_n - a\| \leq \text{Max}(\|u_n - a\|, \|v_n - a\|).$$

En conclusion $\lambda u + (1 - \lambda)v \in T(A, a)$

5. Soit $A = R^+ \times R^+$, explicitons $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$. On vérifie facilement que $T(A, a) = R^+ \times R^+$

6. Soit $A = \{(x, y) \in R^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \geq x^2, x \geq y^2\}$, explicitons $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$.
Soit $u = (x, y) \in T(A, a)$,
 $\exists (x_n, y_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \geq 0, y_n \geq 0, y_n \geq x_n^2, x_n \geq y_n^2, \lambda_n x_n \rightarrow x, \lambda_n y_n \rightarrow y$

En multipliant par λ_n les inégalités, on obtient :

$y_n \geq x_n^2 \Rightarrow \lambda_n (y_n - x_n^2) \geq 0 \Rightarrow \lambda_n y_n - \lambda_n x_n x_n \geq 0$ et par passage à la limite, $y \geq 0$.
De même, $x \geq 0$. On a donc $T(A, a) \subset R^+ \times R^+$. Réciproquement, on pose, pour $(x, y) \in R^+ \times R^+$, $x_n = x/n, y_n = y/n, \lambda_n = n$ et on vérifie que cette suite (x_n, y_n) appartient à l'ensemble A pour n grand.



Exercice n° 6

On a $u_n = Ln(1 + \sin(\frac{(-1)^n}{n^\alpha})) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}}) = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})$. Ces deux séries de terme général v_n et w_n convergent si et seulement si $2\alpha > 1$, donc la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice n° 7

Soit $Y = (y_1, \dots, y_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs.

1. Le $\min_{\alpha \in R} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^2$ est atteint pour $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ (il suffit d'annuler la dérivée de cette fonction convexe). La valeur du minimum est égale à $\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{Y}^2$, où $\bar{Y}$ est la moyenne des éléments du n-uplet.

2. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un autre n-uplet de valeurs positives réelles, trouver le nombre réel a solution du problème de minimisation suivant :

$\text{Min}_{a \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$. On pose $f(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$, on obtient

$f'(a) = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i)$ et la dérivée de cette fonction convexe s'annule pour

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$



3. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$. Pour tout réel $\lambda > 0$, $\sum_{i=1}^n (x_i - \lambda y_i)^2 \geq 0$

et donc le discriminant de cette inéquation du second degré est toujours négatif, ce qui donne l'inégalité recherchée.

4. Soit $f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^4$, $f'(\alpha) = -4 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^3$, $f''(\alpha) = 12 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^2$.

La fonction f est donc strictement convexe et il existe une unique solution au problème de minimisation. L'étude de l'équation $f'(\alpha) = 0$ (regarder le sens de variation de f' et utiliser la question 3), montre d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que la solution est strictement positive.