

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.



Exercice n° 1

1. Montrer que les fonctions $\cos x \operatorname{Ln}(\sin x)$ et $\cos x \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x)$ sont intégrables sur l'intervalle $]0, \pi/2[$, où $\operatorname{Ln}(x)$ désigne le logarithme népérien de x .

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{Ln}(\sin x) dx$.

3. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x) dx$.

Exercice n° 2

Soit la fonction gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1. Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

2. Calculer $I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ en fonction de x et n .

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

4. Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

Exercice n° 3

Soit $y(x)$ une fonction deux fois continument dérivable définie sur R . On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0 \text{ avec les conditions : } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = -1$$

1. Vérifier que $y(x) = -xe^{-x^2/2}$ est solution de l'équation différentielle précédente.
2. Quelles sont les fonctions numériques continues qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t)dt$$

Exercice n° 4



Pour $k > 1$ et $x \in R$ positif, on pose

$$f_k(x) = \frac{((k-1)x+1)^{k/k-1} - kx - 1}{k}$$

et

$$f_k^*(y) = \sup_{x \in R} (xy - f_k(x))$$

1. Calculer $f_k^*(x)$ pour $k = 2$.
2. Etudier la convexité de $f_k(x)$.
3. Calculer $f_k^*(y)$ pour tout $k > 1$.

Exercice n° 5

Soit A une partie non vide de R^2 et $a \in A$. On définit alors l'ensemble suivant :

$$T(A, a) = \{u \in R^2 / \exists (x_n) \in A, \exists \lambda_n > 0, x_n \rightarrow a, \lambda_n(x_n - a) \rightarrow u\}$$

1. Montrer que $(0,0) \in T(A, a)$.
2. Montrer que $T(A, a)$ est un ensemble stable par homothétie positive.
3. Montrer que $T(A, a)$ est un ensemble fermé de R^2 .

4. Montrer que $T(A, a)$ est un ensemble convexe de R^2 si A est une partie convexe de R^2 .
5. Soit $A = R^+ \times R^+$, expliciter $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$.
6. Soit $A = \{(x, y) \in R^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \geq x^2, x \geq y^2\}$, expliciter $T(A, a)$ pour $a = (0, 0)$.



Exercice n° 6

Etudier la série de terme général : $u_n = Ln(1 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right))$ pour $\alpha > 0$

Exercice n° 7

Soit $Y = (y_1, \dots, y_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs.

1. Résoudre le problème de minimisation suivant : $\underset{\alpha \in R}{Min} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^2$
2. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un autre n-uplet de valeurs positives réelles, trouver le nombre réel a solution du problème de minimisation suivant : $\underset{a \in R}{Min} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$
3. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$
4. Montrer qu'il existe une unique solution, strictement positive, au problème de minimisation suivant : $\underset{\alpha \in R}{Min} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^4$