AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R *désigne l'ensemble des nombres réels.*

Exercice n° 1

1. Calculer $I(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{Ln\,t}{1+t^2}dt$ pour tout réel x strictement positif.

   Sans perte de généralité, on peut supposer que $x>1$,

   dans ce cas : $I(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{Ln\,t}{1+t^2}dt=\int_{1/x}^{1}\frac{Ln\,t}{1+t^2}dt+\int_{1}^{x}\frac{Ln\,t}{1+t^2}dt$. Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $u=\frac{1}{t}$ et on obtient moins la deuxième, d'où $I(x)=0$.

2. On effectue le changement de variables : $x=au\cos\theta$ et $y=bu\cos\theta$ pour obtenir $J=\iint_D (x^2-2y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}(\int_0^1 (a^2u^2\cos^2\theta-2bu\sin\theta)abu\,du)d\theta=\frac{ba^3\pi}{16}-\frac{2}{3}ab^2$.

Exercice n° 2

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in Q\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

1. Comme les ensembles Q et $R-Q$ sont denses dans R, tout nombre rationnel est limite d'une suite de nombres irrationnels et réciproquement. La fonction f n'est continue en aucun point de $[0,1]$. Pour $x\in Q, \exists (u_n)\in R-Q$ telle que : $(u_n)\to x$ et $\lim\limits_{u_n\to x} f(u_n)=0\neq f(x)=1$.

2. La fonction g est continue seulement en $x=1/2$ et non dérivable en tout point de $[0,1]$.

3. La fonction h est continue et dérivable seulement en $x=1/2$ et non dérivable ailleurs sur $[0,1]$.

Exercice n° 3

1. Si *p* est un nombre premier, $f(p^2)=pf(p)+pf(p)=2p$, puis $f(p^3)=pf(p^2)+p^2 f(p)=3p^2$.

On vérifie par récurrence que $f(p^\alpha)=pf(p^{\alpha-1})+p^{\alpha-1}f(p)=\alpha\, p^{\alpha-1}$.

On calcule ensuite $f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2})=p_2^{\alpha_2}f(p_1^{\alpha_1})+p_1^{\alpha_1}f(p_2^{\alpha_2})=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2})$

Cela nous conduit à vérifier par récurrence sur *k*, l'expression :

$$f(n)=n\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i} \text{ où } n=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}.$$

2. L'égalité $f(n)=n$ implique $0\le\frac{\alpha_i}{p_i}\le 1$, soit $0\le\alpha_i\le p_i$, d'où $\frac{\alpha_i}{p_i}=1-\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j}$

$\alpha_i=p_i(1-\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j})$ ou encore $(\prod_{j\ne i}p_j)\times\alpha_i=p_i(1-\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j})(\prod_{j\ne i}p_j)$

$(\prod_{j\ne i}p_j)\times\alpha_i=p_i\times(\prod_{j\ne i}p_j-A)$ avec $A=(\sum_{j\ne i}\frac{\alpha_j}{p_j})(\prod_{j\ne i}p_j)$

Ainsi p_i divise le produit $(\prod_{j\ne i}p_j)\times\alpha_i$ et il est premier avec le premier terme. Le théorème de Gauss montre que p_i divise α_i. Comme $0\le\alpha_i\le p_i$, on en déduit que :

$$\forall i\in\{1,...,k\}\quad \alpha_i=0 \quad ou \quad \alpha_i=p_i$$

Comme $\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i}=1$, il n'existera qu'un indice *j* pour lequel $\alpha_j\ne 0$, et vaut p_i.

En conclusion *n* est bien de la forme $n=p^p$. La réciproque est évidente.

Exercice n° 4

1. $u_{n+1} - u_n = \int_1^e x(Lnx)^n (Lnx-1)dx < 0$. La suite (u_n) est positive et décroissante, donc elle converge. On peut aussi remarquer, en intégrant par parties que :

que : $u_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1} > 0$, d'où $u_{n-1} < \frac{e^2}{n}$, et la suite converge vers 0.

2. La suite (v_n) est positive et majorée par $\frac{Ln2}{n+1}$, donc elle converge vers 0.

Exercice n° 5

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

On cherche à déterminer toutes les fonctions numériques continues f qui vérifient :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

Supposons que f soit une solution de cette équation, alors

$f(x) = -1 - x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t)\,dt$ et en particulier $f(0) = -1$.

Le terme de droite de l'équation précédente étant dérivable, f est dérivable.

Et $f^{'}(x) = -\int_0^x f(t)\,dt - xf(x) + xf(x)$, soit $f^{'}(x) + \int_0^x f(t)\,dt = 0$.

Posons $y(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, on obtient l'équation différentielle : $y^{''}(x) + y(x) = 0$.

La solution générale est $y(x) = A\cos x + B\sin x$ et avec les conditions $y(0) = 0$ et $y^{'}(0) = -1$, $y(x) = -\sin x$ et $f(x) = -\cos x$.

On vérifie aisément que $f(x) = -\cos x$ est solution de l'équation proposée.

Exercice n° 6

D'après l'énoncé, on a donc 10 boissons de type B1 et 40 de type B2. Il y a $\binom{50}{4}$ façons de choisir 4 boissons parmi les 50.

1. On prélève, au hasard, 4 boissons dans une livraison de 50 boissons.

- La probabilité d'avoir 4 boissons de type B1 est égale à $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{3}{3290} \cong 0{,}00091$

- La probabilité d'avoir 1 boisson de type B1 et 3 boissons de type B2 est égale à $\frac{10 \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{988}{2303} \cong 0{,}429$

- La probabilité d'avoir au moins une boisson de type B1 est égale à $1 - \frac{\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{13891}{23030} \cong 0{,}603$

2. On prélève maintenant une boisson, on note son type et on la remet dans le lot. On réalise *n* fois cette expérience et on note X le nombre de boissons B1 obtenues.

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (4/5)^n$
- Combien de fois faut-il réaliser l'expérience pour être sûr à 90% d'obtenir au moins une boisson B1 ? Il faut que $P(X \geq 1) = 1 - (4/5)^n > 0{,}9$. Soit, en utilisant le logarithme décimal : $n > \frac{1}{\log(5/4)}$, d'où *n*=11.