AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

Soit $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x,y) = (x-y)^2 + (x^2 - 2ay - b)^2$, où a et b sont deux constantes réelles données.

1. f est-elle bornée ? A quelle condition f peut-elle être nulle ?

f étant toujours positive, elle est minorée par zéro. Par ailleurs, $\underset{x\to\infty}{Lim}\, f(x,0) = +\infty$, donc f n'est pas majorée.

$f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $x^2 = 2ay + b$, soit $y^2 - 2ay - b = 0$. Cette équation admet des racines pour $a^2 + b \geq 0$.

Si $a^2 + b > 0$, f admet un minimum absolu égal à zéro, en deux points (cf. question 3).

2. On suppose que $a^2 + b < 0$, trouver, s'ils existent, les extrema de f.

Les conditions du premier ordre doivent être satisfaites pour obtenir des extrema.

$f_x^{'}(x,y) = 2(x-y) + 4x(x^2 - 2ay - b) = 0$ et $f_y^{'}(x,y) = -2(x-y) - 4a(x^2 - 2ay - b) = 0$.

Par addition, on obtient : $(x-a)(x^2 - 2ay - b) = 0$.

Si $(x^2 - 2ay - b) = 0$, alors $x = y$ et $(x^2 - 2ay - b) = 0$, mais comme $a^2 + b < 0$, on n'a pas de solution. Par conséquent $x = a$, puis $y = \dfrac{2a^3 - 2ab + a}{1 + 4a^2}$. On a une seule solution qui correspond à un minimum local.

3. On suppose que $a^2 + b > 0$. Chercher les extrema locaux et absolus de f.

Comme $a^2 + b > 0$, on a un minimum absolu (nul) atteint en deux points (cf . question 1) et un minimum local pour $x = a$ (cf. question 2).

Exercice n° 2

Soit $f : R^{*} \to R$ définie par : $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$.

1. Tracer avec précision le graphe de f.

La dérivée de f est égale à $f'(x) = \dfrac{2^x}{x^2}(xLog2 - 1)$. Cette fonction est croissante pour $x \geq 1/Log2$ et décroissante sinon. Elle admet un minimum local en $x = 1/Log2$ égal à $eLog2$. Son graphe présente une branche parabolique dans la direction y (en $+\infty$) et les axes sont des asymptotes.

2. Résoudre l'équation : $2^x = x^2$ (on donnera des valeurs approchées avec une erreur inférieure à 0,5).

L'équation $2^x = x^2$ est équivalente à $\dfrac{2^x}{x} = x$ ($x = 0$ n'est pas solution). Les solutions de cette équation correspondent aux points d'intersection entre le graphe de f et la première bissectrice. On a 3 solutions graphiques : deux solutions évidentes $x = 2,$ et $x = 4,$ et une solution négative. La racine négative est comprise entre -1 et -1/2 (on calcule la valeur de f en ces points et on compare à x).

Exercice n° 3

On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$ définie, pour $x > -1$ et $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = nx\frac{(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 1.$$

1. Etudier la continuité de la fonction f_n pour tout $x > -1$.

f_n est continue pour $x \neq 0$ comme quotient de fonctions continues.

Et $\underset{x\to 0}{Lim} f_n(x) = \underset{0}{Lim}\ nx\dfrac{(1+nx)}{nx} = 1 = f_n(0)$. Donc f_n est continue en zéro.

2. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe pour tout $x > -1$.

On trouve $f_n'(x) = n\dfrac{(1+x)^{n-1}}{((1+x)^n - 1)^2}\left[(1+x)^{n+1} - (n+1)x - 1\right]$ et $f_n'(x)$ est du signe de $g(x) = (1+x)^{n+1} - (n+1)x - 1$. On a : $g'(x) = (n+1)((1+x)^n - 1)$, cette dérivée est positive pour $x > 0$, nulle pour $x = 0$, négative sinon et $g(0) = 0$. Donc la dérivée de f_n est toujours positive et f_n est croissante de $\left]-1,+\infty\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$. D'ailleurs, on peut prolonger f_n par continuité à droite en -1 en posant : $f_n(-1) = 0$. Elle admet une asymptote d'équation $y = nx$.

Exercice n° 4

On pose : $P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1$

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x^2 + 1)$.

On vérifie, par division euclidienne, que $P(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)$

2. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$, trouver une primitive de $f(x)$ que l'on notera $F(x)$.

La fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$ admet une décomposition de la forme :

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 2x + 2}$$

Par identification des polynômes ou en utilisant les pôles complexes des fractions ou en prenant des valeurs particulières. Par exemple :

- On multiplie la relation par x, puis $x \to +\infty$, on obtient : $a + c = 0$
- Pour $x = 0$, on obtient : $1/2 = b + d/2$
- Pour $x = 1$, on obtient : $1 = 5(a + b) + 2(c + d)$
- Pour $x = -1$, on obtient : $1 = b - a + 2(-c + d)$

La résolution du système donne : $a = -\dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{1}{5}$, $c = \dfrac{2}{5}$, $d = \dfrac{3}{5}$.

En conclusion : $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-2x + 1}{x^2 + 1} + \dfrac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2}\right)$

On peut encore écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{-2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}\right).$$

Une primitive est de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{5}(-Ln(x^2 + 1) + Arctgx + Ln(x^2 + 2x + 2) + Arctg(x + 1))$$

3. Vérifier que $F(x)$ admet des limites finies lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$

$$\lim_{+\infty} F(x) = \frac{1}{5}\left(Ln\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}\right)\right) + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \text{ et } \lim_{-\infty} F(x) = \frac{1}{5}\left(Ln\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}\right)\right) - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$$

Exercice n° 5

1. Trouver deux nombres réels A et B tels que la relation : $4n^3 = An^2(n+1)^2 + Bn^2(n-1)^2$ soit vérifiée pour tout entier n.

Par identification des polynômes, on obtient : A=1 et B=-1 (en particulier ; $A + B = 0$).

2. Déduire de la relation précédente la somme S_n des cubes des n premiers nombres entiers.

On écrit la relation précédente pour *n*, *n-1*, *n-2*,…*2, 1,* puis on somme les égalités obtenues, d'où $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. Montrer que l'on peut obtenir la somme S_n directement par récurrence.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^3}{4}$$

4. On pose $u_n = \dfrac{s_n}{S_n}$, où s_n désigne la somme des n premiers nombres entiers. Calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$. On a : $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{-2}{n+1} + \dfrac{2}{n}$.

On en déduit par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 2 - \frac{2}{n+1}$$

Exercice n° 6

Soient X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a) = \left\{ u \in R^2 / \exists(u_n), \exists(\lambda_n) > 0, \lim_{n\to\infty} u_n = a, \lim_{n\to\infty} \lambda_n(u_n - a) = u \right\}$$

1. Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

On vérifie aisément que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$, en posant $\lambda_n = n$ et $u_n = a$.

2. Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

a) $X=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2=1\}$ et $a=(1,0)$

Soit $u\in T(X,a)$, il existe une suite $u_n=(x_n,y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n(u_n-a)\to u$. En particulier, $\lambda_n(x_n-1)\to x$, $\lambda_n(y_n)\to y$, $x_n\to 1$, $(y_n)\to 0$.

Comme $(u_n)\in X$, $\lambda_n x_n^2+\lambda_n y_n^2=\lambda_n$ ou encore $\lambda_n(x_n-1)(x_n+1)+\lambda_n y_n y_n=0$ et par passage à la limite, on obtient $x=0$. On vérifie la réciproque pour obtenir :

$$T(X,a)=\{(x,y)/x=0\}$$

b) $X=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\le 1\}$ et $a=(1,0)$

Le raisonnement est identique au cas précédent pour obtenir :

$$T(X,a)=\{(x,y)/x\le 0\}$$

c) $X=\{(x,y)\in R^2 / x\ge 0, -x^2\le y\le x^2\}$ et $a=(0,0)$

Soit $u\in T(X,a)$, il existe une suite $u_n=(x_n,y_n)$ dans X qui converge vers a et $\lambda_n(u_n-a)\to u$. En particulier, $\lambda_n(x_n)\to x$, $\lambda_n(y_n)\to y$, $x_n\to 0$, $(y_n)\to 0$.

Comme $(u_n)\in X$, $-\lambda_n x_n^2\le\lambda_n y\le\lambda_n x_n^2$ et comme $(u_n)\in X$, $x_n\ge 0$

La réciproque est évidente en posant $x_n=\dfrac{x}{n}, y_n=0, \lambda_n=n$ pour obtenir la demi-droite :

$$T(X,a)=\{(x,y)/x\ge 0, y=0\}$$

Exercice n° 7

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B, deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans l'urne A et un jeton dans B que l'on échange en les plaçant dans B et A (étape1). Puis on recommence la même opération.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

Les valeurs possibles de X_n sont 0, 1 et 2.

2. Soit (k,i) un couple d'événements possibles de X_n. Calculer la probabilité que $X_{n+1} = k$ sachant que $X_n = i$.

Etat n	Etat $n+1$	Probabilité
(0,0)	(0,1)	1
(1,1)	(0,1)	1
(0,1)	(0,0)	¼
(0,1)	(0,1)	½
(0,1)	(1,1)	¼

3. On pose $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$, puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où

P désigne la probabilité. Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1} = TV_n$

$$a_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4} b_n$$

$$c_{n+1} = P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} b_n \text{ et}$$

$$b_{n+1} = P(X_{n+1} = 1) = a_n + c_n + \frac{1}{2} b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ d'où } T = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Etudier la suite vectorielle (V_n). Déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Du système précédent, on peut en déduire que si toutes les suites convergent, alors $\underset{n}{Lim}\, a_n = \underset{n}{Lim}\, c_n = 4 \underset{n}{Lim}\, b_n$

La matrice T admet pour valeurs propres : 1, 0 et -1/2. Comme ces valeurs sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par (1, 4, 1).

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par (1, 0,-1).

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est engendré par (1,-2,1).

On obtient $T^n = P\Delta^n P^{-1}$, où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puis $V_{n+1} = T^n V_1 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+1/2^n \\ 4-1/2^{n-1} \\ 1+1/2^n \end{pmatrix}$

En conclusion :

$\lim\limits_{n} a_n = \lim\limits_{n} c_n = \dfrac{1}{6}$ et $\lim\limits_{n} b_n = \dfrac{2}{3}$