ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$2^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R ***désigne l'ensemble des nombres réels.***

Exercice n° 1

Soit $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x, y) = (x - y)^2 + (x^2 - 2ay - b)^2$, où a et b sont deux constantes réelles données.

1. f est-elle bornée ? A quelle condition f peut-elle être nulle ?

2. On suppose que $a^2 + b < 0$, trouver, s'ils existent, les extrema de f.

3. On suppose que $a^2 + b > 0$. Chercher les extrema locaux et absolus de f.

Exercice n° 2

Soit $f : R^* \to R$ définie par : $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$.

1. Tracer avec précision le graphe de f.

2. Résoudre l'équation : $2^x = x^2$ (on donnera des valeurs approchées avec une erreur inférieure à 0,5).

Exercice n° 3

On considère la suite de fonctions $(f_n(x))$ définie, pour $x > -1$ et $n \geq 2$ par :

$$f_n(x) = nx\frac{(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 1.$$

1. Etudier la continuité de la fonction f_n pour tout $x > -1$.

2. Etudier les variations de f_n et tracer son graphe pour tout $x > -1$.

Exercice n° 4

On pose : $P(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1$

1. Montrer que $P(x)$ est divisible par $(x^2 + 1)$.

2. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$, trouver une primitive de $f(x)$ que l'on notera $F(x)$.

3. Vérifier que $F(x)$ admet des limites finies lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

Exercice n° 5

1. Trouver deux nombres réels A et B tels que la relation : $4n^3 = An^2(n+1)^2 + Bn^2(n-1)^2$ soit vérifiée pour tout entier n.

2. Déduire de la relation précédente la somme S_n des cubes des n premiers nombres entiers.

3. Montrer que l'on peut obtenir la somme S_n directement par récurrence.

4. On pose $u_n = \dfrac{s_n}{S_n}$, où s_n désigne la somme des n premiers nombres entiers.

Calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$

Exercice n° 6

Soient X un sous-ensemble fermé non vide de R^2 (ensemble des couples de nombres réels) et a un élément de X. On appelle cône tangent à X en a, le sous-ensemble de R^2 défini par :

$$T(X,a) = \left\{ u \in R^2 / \exists (u_n) \in X, \exists (\lambda_n) \geq 0, \underset{n\to\infty}{Lim} u_n = a, \underset{n\to\infty}{Lim} \lambda_n (u_n - a) = u \right\}$$

1. Montrer que $(0,0)$ appartient à $T(X,a)$.

2. Déterminer $T(X,a)$ dans les cas suivants :

   a) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 = 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

   b) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ et $a = (1,0)$

   c) $X = \left\{ (x,y) \in R^2 / x \geq 0, -x^2 \leq y \leq x^2 \right\}$ et $a = (0,0)$

Exercice n° 7

On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux jetons numérotés 0 et l'urne B, deux jetons numérotés 1. On choisit au hasard un jeton dans l'urne A et un jeton dans B que l'on échange en les plaçant dans B et A (étape1). Puis on recommence la même opération.

Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons dans l'urne A après n échanges.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

2. Soit (k,i) un couple d'événements possibles de X_n. Calculer la probabilité que $X_{n+1} = k$ sachant que $X_n = i$.

3. On pose $a_n = P(X_n = 0)$, $b_n = P(X_n = 1)$, $c_n = P(X_n = 2)$, puis $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où

   P désigne la probabilité. Trouver une matrice T telle que : $V_{n+1} = TV_n$

4. Etudier la suite vectorielle (V_n). Déterminer, si elles existent, les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).