AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Pour tout entier *n* strictement positif, la suite (α_n) est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} - \alpha_n),\ \alpha_1 = 1, \text{ et } \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Exprimer α_n en fonction de *n* et calculer sa limite.

L'équation associée à la relation de récurrence s'écrit :

$2x^2 - x + 1 = 0$ et les solutions sont : $x = -1$ ou $x = 1/2$.

Le terme général de la suite (α_n) est de la forme : $\alpha_n = \lambda(-1)^n + \mu(1/2)^n$ avec $\alpha_1 = 1 = -\lambda + \mu(1/2)$ et $\alpha_2 = -1/2 = \lambda + \mu(1/4)$. La résolution du système donne : $\lambda = -2/3$ et $\mu = (2/3)$. On obtient :

$$\alpha_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Et la limite de $(-1)^n$ n'existe pas, donc la suite (α_n) n'a pas de limite.

2. Pour tout entier *n*, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

On vérifie aisément que cette suite (x_n) est bien définie, car toujours strictement positive.

On peut calculer quelques premiers termes, par exemple : $x_2 = 2^{-1/2}$ $x_3 = 2^{3/4}$, $x_4 = 2^{-7/8}$.

On montre alors par récurrence que $x_n = 2^{\alpha_n}$ (on peut aussi passer au logarithme en base 2, puisque la suite est strictement positive. En effet : $x_{n+2} = \sqrt{\frac{2^{\alpha_n}}{2^{\alpha_{n+1}}}} = (2^{\alpha\alpha_n - \alpha_{(n+1}})^{1/2}$ et x_{n+2} est de la forme $2^{\alpha_{n+2}}$ si et seulement si on a la relation : $\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ avec $\alpha_1 = 1$, et $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. On se trouve dans la situation de la question précédente, donc :

$$x_n = 2^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

3. Déterminer la limite de x_n quand $n \to +\infty$.

Cette limite n'existe pas à cause du terme $(-1)^n$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice n° 2

1. Montrer l'existence d'une fonction φ définie implicitement par la relation $Arctg(x-y)+1 = e^{x+y}$ au voisinage de $(0,0)$.

Soit $f(x,y) = Arctg(x-y)+1-e^{x+y}$. On a : $f(0,0) = 0$, f est de classe C^2 au voisinage de l'origine et $f_y'(0,0) = -2 \neq 0$. Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont donc vérifiées. Il existe *I* un voisinage de 0, *J* un voisinage de 0 et une fonction φ de *I* dans *J* telle que :

- φ est da classe C^2 au voisinage de l'origine,
- $\varphi(0) = 0$ et
- $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = y,\ \forall x \in I, \forall y \in J$

De plus $\varphi'(0) = -\frac{f_x'(0,0)}{f_y'(0,0)}$

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 pour $y = \phi(x)$ au voisinage de 0.

D'après la formule de Taylor, on a : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + o(x^2)$

On obtient : $f_x' = \frac{-1}{1+(x-y)^2} - e^{x+y}$ et $f_x'(0,0) = 0$, donc $\varphi'(0) = 0$.

Dans la relation explicite de $f(x,y)$ en remplace y par $\phi(x)$, puis on calcule la différentielle seconde à l'origine, on obtient : $d^2 f(0,0) = f_{xx}''(0,0) + f_y'(0,0) \times \varphi''(0) = 0$ avec $f_{xx}''(0,0) = -1$ et $f_y'(0,0) = -2$, d'où $\varphi''(0) = -1/2$.

En conclusion :

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Exercice n° 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

On décompose la fraction rationnelle : $\frac{x^2-1}{2x-1}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{3/4}{2x-1}$ pour obtenir :

$$I_1=\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}Ln|2x-1|\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{8}Ln3$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

2. $I_2=\int_{0}^{1} \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$. On pose $t=e^x$.

$$I_2=\int_{1}^{e} \frac{t-1}{(t+1)t}dt=\int_{1}^{e}\left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t}\right)dt=\left[2Ln(t+1)-Lnt\right]_1^e=2Ln(\frac{e+1}{2})-1$$

3. $I_3=\int_{2}^{3} \frac{2x}{(x^2-1)^2}Ln(x)\,dx$ (on donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$, où p et q sont des nombres rationnels). On effectue une intégration par parties. On pose : $u'(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ et $v(x)=Lnx$, pour obtenir

$$I_3=\left[-\frac{Lnx}{x^2-1}\right]_2^3+\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx=-\frac{1}{8}Ln3+\frac{1}{3}Ln2+\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx.$$

On décompose la fraction rationnelle du deuxième terme :

$$\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}$$

Enfin $I_3=-\frac{1}{8}Ln3+\frac{1}{3}Ln2+\left[-Lnx+\frac{1}{2}Ln(x-1)+\frac{1}{2}Ln(x+1)\right]_2^3=\frac{17}{6}Ln2-\frac{13}{8}Ln3$

Exercice n° 4

Une entreprise produit des biens A, B et C. La production de ces biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés pour chaque unité produite sont donnés dans le tableau suivant :

	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Profit
A	1	3	1	2	5
B	6	1	3	3	5
C	3	3	2	4	5

Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de 84, 42, 21 et 42.

Déterminer la quantité de biens à produire pour maximiser le profit.

Notons x le nombre de biens A, y le nombre de biens B et z le nombre de biens C pour obtenir un profit maximal. Le problème de maximisation s'écrit sous la forme :

$Max\{5x+5y+5z / x+6y+3z \le 84,\ 3x+y+3z \le 42,\ x+3y+2z \le 21,\ 2x+3y+4z \le 42\}$.

La résolution « classique » de ce problème peut s'avérer un peu longue, mais il est parfois préférable de réfléchir un peu avant de se lancer dans des calculs.

Sachant que le profit est le même pour chaque produit, fabriquons au maximum le produit le plus rapide à obtenir, soit le produit A (7) (contre 13 pour B et 12 pour C), en respectant les contraintes d'utilisation des machines. Le maximum de A est donc x=14 (inéquation 2 saturée). Dans ce cas : y=z=0. Le profit est donc de 70.

Exercice n° 5

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A.

On a : $\det(A-\lambda I)=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$, donc $\lambda=2$ est une valeur propre simple et $\lambda=1$ est une valeur propre double.

Le vecteur $e_1 = (1,0,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Le sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, engendré par $e_2 = (1,1,0)$. Complétons la base par la recherche d'un vecteur e_3 vérifiant $Ae_3 = e_2 + e_3$. On trouve $e_1 = (1,1,1)$.

La matrice *A* est donc semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer A^n pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2.

On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta + J$, et comme $J^2 = 0$, on obtient :

$T^n = (\Delta + J)^n = \Delta^n + n\Delta^{n-1}J$.

Puis $A^n = PT^nP^{-1}$, avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En conclusion :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^n + n + 1 & n \\ -n & n+1 & n \\ 2^n - 1 & -2^n + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice n° 6

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$.

Calculer $P(-1)$, $P(1)$ et $P(2)$, puis montrer que $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$ (ensemble des polynômes de la variable *X* à coefficients entiers).

On vérifie aisément que : $P(-1) = P(1) = P(2) = -1$, donc $P(X) + 1$ est divisible par $X+1, X-1, X-2$ et on obtient :
$P(X) = (X+1)(X-1)(X-2) + 1$

Supposons que $P(X)$ ne soit pas irréductible dans $Z[X]$, alors $P(X) = A(X)B(X)$, avec $A(X), B(X) \in Z[X]$. Comme $d^0B \geq 1$, $d^0A < 3$, de même $d^0B < 3$ et $d^0(A+B) < 3$.

On a : $P(-1) = A(-1)B(-1) = -1$ et les entiers relatifs $A(-1), B(-1)$ sont opposés et égaux à +1 ou -1, d'où $A(-1) + B(-1) = 0$, de même $A(1) + B(1) = 0$ et $A(2) + B(2) = 0$.

Le polynôme $A(X) + B(X)$ de degré strictement inférieur à 3 admet 3 racines, il est donc nul et $A(X) = -B(X)$, donc $P(X) = -A(X)^2 < 0$.

Par ailleurs, $P(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$, ce qui est contradictoire.

En conclusion $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$.

Exercice n° 7

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On pose $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$, où α est un nombre réel compris entre 0 et 1.

1. On suppose que X (respectivement Y) suit une loi normale de moyenne m_1 (resp. m_2) et d'écart type σ_1 (resp. σ_2) et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. Déterminer la loi de Z.

Notons m la moyenne de Z et σ son écart type. On a : $m = \alpha m_1 + (1-\alpha) m_2$ et $\sigma = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2}$. La somme de deux lois normales étant une loi normale, Z suit donc une loi normale de paramètres m et σ.

2. On ne suppose pas de lois a priori sur X et Y, ni qu'elles sont indépendantes, mais on suppose toutefois qu'elles admettent des moments d'ordre1 et 2.

Déterminer α de façon que la variance de Z soit minimale.

On note $V = \begin{pmatrix} Var\,X & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var\,Y \end{pmatrix}$ la matrice de variance-covariance de X et Y, où $Var\,X$ (resp. $Var\,Y$) désigne la variance de X (resp. Y) et $Cov(X,Y)$ la covariance de ces deux variables. On suppose que cette matrice V est inversible.

On cherche donc à résoudre le problème d'optimisation $\underset{\alpha}{Min}\ Var(Z)$. Il s'agit d'une forme quadratique définie positive, donc strictement convexe et le problème admet une unique solution.

On a

$$Var(Z) = \alpha^2 \, VarX + (1-\alpha)^2 \, VarY + 2\alpha(1-\alpha) Cov(X,Y)$$

Puis,

$$\frac{\partial Var(Z)}{\partial \alpha} = 2\alpha \; VarX - 2(1-\alpha) VarY + 2(1-2\alpha) Cov(X,Y)$$

Cette expression s'annule pour :

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$\alpha = \frac{VarY - Cov(X,Y)}{VarX + VarY - 2Cov(X,Y)},$$

car $Var(X-Y) = VarX + VarY - 2Cov(X,Y) > 0$.

.