ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Pour tout entier n strictement positif, la suite (α_n) est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} - \alpha_n),\ \alpha_1 = 1, \text{ et } \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Exprimer α_n en fonction de n et calculer sa limite, si elle existe.

2. Pour tout entier n, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_n}{x_{n+1}}}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

3. Déterminer la limite (si elle existe) de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice n° 2

1. Montrer l'existence d'une fonction φ définie implicitement par la relation $Arctg\,(x-y)+1=e^{x+y}$ au voisinage de $(0,0)$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 pour $y=\phi(x)$ au voisinage de 0.

Exercice n° 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$

2. $\int_{0}^{1} \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$

3. $\int_{2}^{3} \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln(x)\,dx$ (on donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$, où p et q sont des nombres rationnels)

Exercice n° 4

Une entreprise produit des biens A, B et C. La production de ces biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés pour chaque unité produite sont donnés dans le tableau suivant :

	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Profit
A	1	3	1	2	5
B	6	1	3	3	5
C	3	3	2	4	5

Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de 84, 42, 21 et 42.

Déterminer la quantité de biens à produire pour maximiser le profit.

Exercice n° 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A.

2. Calculer A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

Exercice n° 6

Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$.

Calculer $P(-1)$, $P(1)$ et $P(2)$, puis montrer que $P(X)$ est irréductible dans $Z[X]$ (ensemble des polynômes de la variable X à coefficients entiers).

Exercice n° 7

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On pose $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$, où α est un nombre réel compris entre 0 et 1.

1. On suppose que X (respectivement Y) suit une loi normale de moyenne m_1 (resp. m_2) et d'écart type σ_1 (resp. σ_2) et que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. Déterminer la loi de Z.

2. On ne suppose pas de lois a priori sur X et Y, ni qu'elles sont indépendantes, mais on suppose toutefois qu'elles admettent des moments d'ordre 1 et 2 et vérifient : $Var(X-Y) > 0$
Var désigne la variance.

Déterminer α de façon que la variance de Z soit minimale.