

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, qui converge vers une limite l .

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n .

$$\sum_{k=0}^n v_k = u_{n+1} - u_0 \text{ qui converge vers } l - u_0.$$

$\sum_{k=0}^n w_k = \ln u_{n+1} - \ln u_0$ qui converge vers $\ln l - \ln u_0$ si l est non nulle et qui est divergente si $l=0$.

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, dont le premier terme u_0 est strictement compris entre 0 et 1.



- Etudier la convergence de la suite (u_n) .

On a : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, donc la suite est décroissante et on vérifie par récurrence que : $0 < u_n < 1$. La suite étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite l solution de l'équation : $l = f(l)$, à savoir $l=0$.

- En déduire la convergence des séries de terme général : u_n^2 , $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n .

$$\text{On a : } \sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1} \text{ qui converge vers } -u_0.$$

Puisque $l=0$, la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente (questions 1 et 2).

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$, on a : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \approx -u_n$ et ces deux séries sont de même nature donc la série de terme général u_n est divergente.

Exercice n° 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels et f une application de E dans F qui vérifie les deux assertions suivantes :

$$(1) \forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(2) \forall K > 0, \forall x \in E, \quad \|x\| < 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq K$$



1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f .

$f(0 + 0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$ et $f(x - x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, donc f est impaire.

2. Montrer que $\forall x \in E, \forall \lambda \in Q, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$, où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

On vérifie par récurrence que : $f(nx) = n f(x)$ pour tout entier n .

Pour q entier non nul, $f(x) = f(q \times \frac{x}{q}) = q f(\frac{x}{q})$, donc $f(\frac{x}{q}) = \frac{1}{q} f(x)$

Pour $\frac{p}{q} \in Q, f(\frac{p}{q} x) = f(p \times \frac{x}{q}) = p f(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q} f(x)$

3. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers zéro, calculer la limite de la suite $f(x_n)$.

Par hypothèse f est bornée sur la boule unité et (x_n) converge vers zéro, donc :

$$\forall 0 < \varepsilon < 1, \exists N, \forall n > N, \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x_n)\| \leq K,$$

$$\text{Pour } \lambda \in Q^+ \text{ et } \|\lambda x_n\| \leq 1 \quad f(\lambda x_n) = \lambda f(x_n) \text{ et } \lambda \|f(x_n)\| \leq K.$$

D'où $\|f(x_n)\| \leq K / \lambda$ et quand λ tend vers l'infini, $f(x_n)$ tend vers zéro.

4. Montrer que f est continue en 0 et en déduire que f est continue et linéaire.

D'après la question précédente, f est continue au voisinage de zéro.

Soit une suite (x_n) qui converge vers x , alors $f(x_n - x) = f(x_n) - f(x)$ converge vers 0 et f est continue sur R .

Comme l'ensemble Q est dense dans R : $\forall \lambda \in R, \exists \lambda_p \in Q, \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = \lambda$.

On a (question 3) : $f(\lambda_p x) = \lambda_p f(x)$ et par passage à la limite, puisque f est continue :

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f \text{ est linéaire.}$$

Exercice n° 3

1. Pour t nombre réel compris strictement entre 0 et 1, calculer l'intégrale suivante :

$$A(t) = 2 \int_0^1 \text{Max}(\omega(1-t), t(1-\omega)) d\omega$$

On a $0 < t < 1$, et $\omega(1-t) < t(1-\omega)$ pour $\omega < t$, donc

$$A(t) = 2 \int_0^t t(1-\omega) d\omega + 2 \int_t^1 \omega(1-t) d\omega = 2 \left[t\omega - t\omega^2/2 \right]_0^t + 2 \left[(1-t)\omega^2/2 \right]_t^1, \text{ puis}$$

$$A(t) = t^2 - t + 1$$

2. Pour $x, y > 0$, on pose : $V(x, y) = 2 \int_0^1 \text{Max}\left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y}\right) d\omega$

Calculer cette intégrale.

On a : $\frac{\omega}{x} < \frac{1-\omega}{y}$ si et seulement si $\omega < \frac{x}{x+y}$.

$$V(x, y) = 2 \int_0^{x/(x+y)} \frac{1-\omega}{y} d\omega + 2 \int_{x/(x+y)}^1 \frac{\omega}{x} d\omega \left[\frac{\omega - \omega^2/2}{y} \right]_0^{x/(x+y)} + 2 \left[\frac{\omega^2/2}{x} \right]_{x/(x+y)}^1$$

$$V(x, y) = 2 \left(\frac{x}{y(x+y)} - \frac{x^2}{2y(x+y)^2} \right) + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{(x+y)^2} \right)$$

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + xy}{xy(x+y)^2} = \frac{x+y}{xy} - \frac{1}{(x+y)}$$

Exercice n° 4



Soient E un espace vectoriel normé réel et f une fonction numérique définie sur E . On dit que f est quasi-convexe si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \text{Sup}(f(x), f(y))$$

1. Montrer que f est quasi-convexe si et seulement si l'ensemble $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.

(1) Si f est quasi-convexe, $\forall x, y \in A_\alpha, f(x) \leq \alpha, f(y) \leq \alpha$.

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \text{Sup}(f(x), f(y)) \leq \alpha$ et A_α est convexe.

(2) Réciproquement, si A_α est convexe.

Pour $x, y \in E$, et $\lambda \in [0, 1]$, on choisit $\alpha = \sup(f(x), f(y))$
et $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \sup(f(x), f(y))$

2. Montrer que toute fonction monotone est quasi-convexe.

Si f est monotone, alors $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ est un intervalle, donc convexe et f est quasi convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe.
Par exemple le logarithme ou la racine carrée.



4. Soit f_i une famille de fonctions numériques quasi-convexes définies sur E , telle que, pour tout x de E , $\sup_i f_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction $g(x) = \sup_i f_i(x)$ est quasi-convexe.

Pour $x \in E$, on vérifie que : $\{x \in E / g(x) \leq \alpha\} = \bigcap_i \{x \in E / f_i(x) \leq \alpha\}$ et une intersection d'ensembles convexes est convexe, donc $g(x) = \sup_i f_i(x)$ est quasi-convexe.

5. Soient X un sous ensemble convexe ouvert non vide de E et f une fonction numérique différentiable définie sur X . On suppose que f quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x, y \in X, f(y) \leq f(x) \Rightarrow df(x)(y - x) \leq 0$$

$\forall x, y \in X, x \neq y, f(y) \leq f(x)$, on a : pour tout $t \in [0, 1]$, $f(x + t(y - x)) \leq f(x)$.

On pose, pour $t \in R, t \neq 0$, $\varepsilon(t) = \frac{f(x + t(y - x)) - f(x) - df(x)(t(y - x))}{\|t(y - x)\|}$.

Puisque f est différentiable en x , $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. On en déduit que :

$t[\varepsilon(t) \times \|(y - x)\| + df(x)(y - x)] \leq 0$, puis en simplifiant par t et par passage à la limite, on obtient l'inégalité demandée.

6. Soient X un sous ensemble convexe ouvert non vide de E et f une fonction numérique deux fois différentiable définie sur X . On suppose que f quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x \in X, \forall h \in E, df(x)(h) = 0 \Rightarrow d^2 f(x)(h, h) \geq 0$$

Faisons une démonstration par l'absurde : $\exists x \in X, \exists h \in E, df(x)(h) = 0$ et $d^2 f(x)(h, h) < 0$.

On pose : $\varphi(t) = f(x + th)$ qui est définie sur un intervalle $] -a, a[$, pour a suffisamment petit (de façon que φ soit définie sur X , convexe ouvert).

D'après la formule de Taylor :

$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + o(t^2)$. En particulier pour t petit et positif :

$$(1) \quad \varphi(t) - \varphi(0) = f(x+th) - f(x) < 0 \text{ et } \varphi(-t) - \varphi(0) = f(x-th) - f(x) < 0$$

Remarquons que $x = \frac{1}{2}(x+th) + \frac{1}{2}(x-th)$. Puisque f est quasi convexe, on en déduit que :
 $f(x) \leq \text{Sup}(f(x+th), f(x-th))$, ce qui contredit (1).

Exercice n° 5



On considère la suite $(u_n(\lambda))$ pour un paramètre réel λ strictement positif par :

$$u_n(\lambda) = \frac{e^{nLn\lambda - \lambda}}{n!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n(\lambda))$ est convergente pour tout $\lambda > 0$.

$$\frac{u_{n+1}(\lambda)}{u_n(\lambda)} = \frac{\lambda}{n+1} < 1 \text{ pour } n \text{ grand, donc la suite est décroissante et positive, donc elle converge.}$$

2. Déterminer le maximum de $(u_n(\lambda))$ pour n fixé.

La dérivée de $(u_n(\lambda))$ est égale à $u'_n(\lambda) = \frac{1}{n!} \left(\frac{n-x}{x} \right) e^{nLn x - x}$. Le maximum est atteint pour $x=n$
 et vaut $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$

3. Peut-on prolonger $(u_n(\lambda))$ par continuité en $\lambda = 0$?

On a $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{nLn\lambda - \lambda}}{n!} = 0$ et on peut prolonger par zéro.

Exercice n° 6

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \dots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \text{ (inégalité de Markov),}$$

où P désigne la probabilité et $E(X)$ l'espérance mathématique de X .

(1) Si toutes les valeurs $x_1, \dots, x_n$ sont strictement inférieures à a , alors : $P(X \geq a) = 0$ et l'inégalité est évidente.

Dans le cas contraire, il existe au moins une plus petite valeur x_k supérieure ou égale à a .

(2) Si $k = 1$, toutes les valeurs de X sont supérieures à a et $P(X \geq a) = 1$, ainsi que :

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) x_i \geq a \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \text{ et } E(X) \geq a \text{ et l'inégalité est évidente.}$$

(3) Si $k > 1$, alors $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) x_i = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = x_i) x_i + \sum_{i=k}^n P(X = x_i) x_i$.

On peut minorer le deuxième terme : $\sum_{i=k}^n P(X = x_i) x_i \geq a \sum_{i=k}^n P(X = x_i)$ et

$$\sum_{i=k}^n P(X = x_i) x_i \geq a P(X \geq a), \text{ d'où } E(X) \geq a P(X \geq a) \text{ et comme } a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

2. Un fabricant produit en moyenne 20 produits par semaine. Cette production est plus ou moins aléatoire, car elle dépend des fournisseurs et de la disponibilité des matières premières. Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine ?

D'après l'inégalité de Markov : $P(X \geq 40) \leq \frac{1}{2}$. Le producteur a au plus une chance sur deux de doubler sa production.

3. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Où $\sigma(X)$ correspond à l'écart-type de X .



On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$.

$$P((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2} \text{ et } E((X - E(X))^2) = \sigma^2(X) ;$$

Et par croissance de la racine carrée, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$