ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$2^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, qui converge vers une limite *l*.

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n.

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, dont le premier terme u_0 est strictement compris entre 0 et 1.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

- Etudier la convergence de la suite (u_n).

- En déduire la convergence des séries de terme général : u_n^2, $Ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n.

Exercice n° 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels et f une application de E dans F qui vérifie les deux assertions suivantes :

$$(1)\ \forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(2)\ \forall K > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\| < 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq K$$

1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.

2. Montrer que $\forall x \in E, \forall \lambda \in Q, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$, où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

3. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers zéro, calculer la limite de la suite $f(x_n)$.

4. Montrer que f est continue en 0 et en déduire que f est continue et linéaire.

Exercice n° 3

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1. Pour t nombre réel compris strictement entre 0 et 1, calculer l'intégrale suivante :

$$A(t) = 2\int_0^1 Max(\omega(1-t), t(1-\omega))d\omega$$

2. Pour x, y>0, on pose : $V(x,y) = 2\int_0^1 Max(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y})d\omega$

Calculer cette intégrale.

Exercice n° 4

Soient E un espace vectoriel normé réel et f une fonction numérique définie sur E. On dit que f est quasi-convexe si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que f est quasi-convexe si et seulement si l'ensemble $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.

2. Montrer que toute fonction monotone sur R est quasi-convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe.

4. Soit f_i une famille de fonctions numériques quasi-convexes définies sur *E*, telle que, pour tout *x* de *E*, $Sup\, f_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction $g(x) = Sup\, f_i(x)$ est quasi-convexe.

5. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x, y \in X,\ f(y) \leq f(x) \Rightarrow df(x)(y-x) \leq 0$$

6. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique deux fois différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x \in X,\ \forall h \in E,\ df(x)(h) = 0 \Rightarrow d^2 f(x)(h,h) \geq 0$$

Exercice n° 5

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

On considère la suite $(u_n(\lambda))$ pour un paramètre réel λ strictement positif par :

$$u_n(\lambda) = \frac{e^{nLn\lambda - \lambda}}{n!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n(\lambda))$ est convergente pour tout $\lambda > 0$.

2. Déterminer le maximum de $(u_n(\lambda))$ pour *n* fixé.

3. Peut-on prolonger $(u_n(\lambda))$ par continuité en $\lambda = 0$?

Exercice n° 6

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \text{ (inégalité de Markov),}$$

où *P* désigne la probabilité et *E(X)* l'espérance mathématique de *X*.

2. Un fabricant produit en moyenne 20 produits par semaine. Cette production est plus ou moins aléatoire, car elle dépend des fournisseurs et de la disponibilité des matières premières. Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine ?

3. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)|) \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Où $\sigma(X)$ correspond à l'écart-type de *X*.