ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n$

Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

On a : $0 < (2n)u_{2n} = 2(u_{2n} + \dots + u_{2n}) \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = 2(S_{2n} - S_n)$, car la suite est décroissante.

Puisque la série de terme général u_n converge, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(S_{2n} - S_n) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)u_{2n} = 0$

De même, $0 < (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = (2n)u_{2n} + u_{2n} \rightarrow 0$. Donc les suites de rangs pairs et impairs extraites de la suite (nu_n) convergent et ont la même limite 0. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$

2. Donner un exemple de suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers zéro.

Il faut choisir une suite non monotone. Par exemple, la suite définie par :

$u_0 = 0, u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré parfait non nul et 0 ailleurs. La suite est positive, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} < +\infty \text{ et pourtant } p^2 u_{p^2} = 1 \rightarrow 1. \text{ La suite } (nu_n) \text{ admet une suite extraite qui}$$

converge vers 1, donc on ne peut avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$

3. Soit σ une application injective de N^* (ensemble des entiers naturels non nuls) dans lui-même. Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Montrons que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \frac{1}{4n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}$$

Si la suite (S_n) était convergente, on devrait avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ ce qui contredit l'inégalité précédente. La série considérée est donc divergente.

Exercice n° 2

1. Montrer que pour tout x nombre réel, on a : $1 + x \leq e^x$

On applique la formule de Taylor à l'exponentielle, à l'ordre deux, entre 0 et x , pour obtenir :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\theta x}, \text{ d'où } e^x - (1 + x) = \frac{x^2}{2} e^{\theta x} \geq 0$$

2. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = (1 + k)(1 + k^2) + \dots + (1 + k^n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et pour } 0 \leq k < 1$$

On applique le résultat précédent avec $x = k^p$, il vient : $1 \leq 1 + k^p \leq e^{(k^p)}$

Et par récurrence : $1 \leq u_n = (1 + k) \dots (1 + k^n) \leq e^{(k+k^2+\dots+k^n)}$

Or $k + k^2 + \dots + k^n = k \frac{1 - k^n}{1 - k} \leq \frac{k}{1 - k}$, car k est compris entre 0 et 1. Comme la fonction exponentielle est croissante, $e^{(k+k^2+\dots+k^n)} \leq e^{k/(1-k)}$ et on obtient : $1 \leq u_n \leq e^{k/(1-k)}$.

Par ailleurs la suite est croissante, en effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + k^{n+1} \geq 1$.

En conclusion la suite est convergente car elle est majorée et croissante.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \operatorname{Ln}(k)}$ (cette question est indépendante des deux précédentes)

On considère la fonction $\operatorname{Ln}|\operatorname{Ln} x|$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ et on applique le théorème des accroissements finis :

$$\forall p \geq 2, \exists \theta \in]0, 1[, \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(p+1)) - \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} p) = \frac{1}{(p+\theta)\operatorname{Ln}(p+\theta)}$$

La croissance de la fonction logarithmique implique : $\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(p+1)) - \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} p) \leq \frac{1}{p\operatorname{Ln}(p)}$

En additionnant membre à membre les inégalités de 2 à n , on obtient :

$$\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(n+1)) - \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} 2) \leq \frac{1}{2\operatorname{Ln} 2} + \dots + \frac{1}{n\operatorname{Ln} n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(n+1)) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \operatorname{Ln}(k)} = +\infty$

Exercice n° 3

1. Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ n nombres réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice carrée

d'ordre

n (elle présente des 1 sur la sous diagonale, les a_i sur la dernière colonne et partout ailleurs des zéros). Calculer le polynôme caractéristique de A .

En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\text{Det}(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-1}(a_{n-1} - \lambda) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k+1} a_k \text{Det}(A_k), \text{ où } A_k \text{ est une matrice par blocs}$$

définie par : $A_k = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \lambda & \dots & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On obtient } \text{Det}(A_k) = (-\lambda)^k \text{ et}$$

$$\text{Det}(A - \lambda I) = (-\lambda)^{n-1}(a_{n-1} - \lambda) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k+1} a_k (-\lambda)^k = (-1)^{n+1} (\lambda^{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k)$$

2. Trouver une matrice carrée A d'ordre 4 qui vérifie l'équation : $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$

D'après la relation précédente :

$$\lambda^4 - a_0 - a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda^3 = 0 \Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3 , il existe un unique vecteur y de R^3 qui vérifie :

$$Det(x_1, x_2, z) = y.z, \quad \forall z \in R^3$$

Où $y.z$ désigne le produit scalaire euclidien de ces deux vecteurs et Det le déterminant. Le vecteur y s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2 et on note $y = x_1 \wedge x_2$.

1. Calculer dans une base orthonormée de R^3 , les composantes de y en fonction de celles de x_1 et x_2 .

Soient $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})$ $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$

Pour $z = (1, 0, 0)$ on obtient $y_1 = x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}$

Pour $z = (0, 1, 0)$ on obtient $y_2 = x_{13}x_{21} - x_{23}x_{11}$

Pour $z = (0, 0, 1)$ on obtient $y_3 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$

2. On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme u de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$

- Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$

On vérifie que les composantes des deux vecteurs de l'égalité du double produit vectoriel sont identiques. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$, la première composante est $x_2w_1w_2 + x_3w_1w_2 + x_1(w_1^2 - 1)$ sachant que le vecteur w est unitaire. Il en est de même des deux autres composantes.

- Montrer qu'il existe un réel k tel que : $u^3 = ku$

- En déduire les valeurs propres réelles de u et les sous espaces propres associés.

On a : $u^2(x) = (x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$ et $u^3(x) = -u(x)$ car $w \wedge w = 0$

Si x est un vecteur propre, associé à la valeur propre λ

$$u^3(x) = \lambda^3 x = -\lambda x \text{ et } \lambda^3 + \lambda = 0 \text{ et } \lambda = 0$$

Le sous espace propre associé est défini par $x \wedge w = 0$, soit la droite vectorielle engendrée par w .

3. Pour tout réel α , on note φ_α l'application définie sur R^3 par : $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$

- Montrer que φ_α est une bijection de R^3

On a : $\varphi_\alpha = id + \alpha u$

Si cette application n'était pas inversible, il existerait un alpha non nul tel que :

$Det(id + \alpha u) = 0 = \alpha^2 Det(u + \frac{1}{\alpha} id)$ et donc $-1/\alpha$ serait un vecteur propre de u .

Contradiction avec le résultat précédent.

- Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

Dans $u^3 + u = 0$, on remplace u par $\frac{1}{\alpha}(\varphi_\alpha - Id)$

Si alpha est non nul, on trouve : $\varphi_\alpha^3 - 3\varphi_\alpha^2 + (3 + \alpha^2)\varphi_\alpha - (1 + \alpha^2)id = 0$ +

On peut choisir : $P(x) = x^3 - 3x^2 + (3 + \alpha^2)x - (1 + \alpha^2)$

- En déduire l'expression de l'application réciproque de φ_α en fonction de α et u .

On a : $\varphi_\alpha \circ (\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3 + \alpha^2)id) = (1 + \alpha^2)id$

D'où, $\varphi_\alpha^{-1} = \frac{1}{1 + \alpha^2}(\varphi_\alpha^2 - 3\varphi_\alpha + (3 + \alpha^2)id) = id - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}u + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}u^2$

Exercice n° 5

Les deux questions sont indépendantes. R_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et C^k les fonctions k fois continûment dérivables.

1. Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et que dans un voisinage de zéro,

$f''(x) \geq -\frac{p}{x^2}$, où p est une constante positive. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x)$

On va montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) = 0$

Par hypothèse, $\exists \eta > 0, \forall x \in]0, \eta[\Rightarrow x^2 f''(x) \geq -p$

Pour $\alpha > 1$ et $x < \frac{\eta}{\alpha}$

$f(\alpha x) = f(x) + (\alpha - 1)x f'(x) + \frac{(\alpha - 1)^2}{2} x^2 f''(\sigma)$

Et on en déduit, $x f'(x) = \frac{f(\alpha x) - f(x)}{\alpha - 1} - \frac{(\alpha - 1)}{2} x^2 f''(\sigma)$, mais :

$$x^2 f''(\sigma) = \frac{x^2}{\sigma^2} \sigma^2 f''(\sigma^2) \geq -p \frac{x^2}{\sigma^2} \text{ donc } -\frac{(\alpha - 1)}{2} x^2 f''(\sigma) \leq \frac{\alpha - 1}{2} p \frac{x^2}{\sigma^2} \leq \frac{\alpha - 1}{2} p$$

Soit $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\alpha > 1$ tel que $(\alpha - 1)p < \varepsilon$, ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(x)}{\alpha - 1} = 0$, donc $\exists \eta_1 < \eta, 0 < x < \eta_1 \Rightarrow \frac{f(\alpha x) - f(x)}{\alpha - 1} < \frac{\varepsilon}{2}$

Et par suite, $0 < x < \eta_1 \Rightarrow x f'(x) < \varepsilon$

Fixons, $0 < \alpha < 1$, on a de même $x f'(x) = \frac{f(x) - f(\alpha x)}{1 - \alpha} + \frac{1 - \alpha}{2} x^2 f''(\sigma)$ avec :

$$\frac{1 - \alpha}{2} x^2 f''(\sigma) \geq -\frac{1 - \alpha}{2} p \frac{x^2}{\sigma^2} \geq -\frac{1 - \alpha}{2\alpha^2} p$$

On peut choisir α tel que $\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} p < \varepsilon$, comme ci-dessus on obtient $\eta_2 < \eta$ tel que $0 < x < \eta_2 \Rightarrow x f'(x) > -\varepsilon$

On a donc $\forall x \in]0, \text{Inf}(\eta_1, \eta_2)[, |x f'(x)| < \varepsilon$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x) = 0$

2. Soit $f \in C^5(R, R)$ une fonction impaire qui vérifie :

(1) $f(0) = 0$

(2) $\exists M > 0, \forall x \in R, |f^{(5)}(x)| \leq M$

Montrer que pour tout réel x , on a : $\left| f(x) - \frac{x}{3} f'(x) \right| \leq \lambda M |x|$.

Déterminer la meilleure constante possible λ .

Soit $\varphi(x) = f(x) - \frac{x}{3} f'(x)$ et $\varphi(0) = 0$ Par dérivation, on obtient :

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} f'(x) - \frac{x}{3} f''(x) \text{ et } \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{3} f''(x) - \frac{x}{3} f'''(x) \text{ et } \varphi''(0) = 0$$

$$\varphi^{(3)}(x) = -\frac{x}{3} f^{(4)}(x) \text{ et } \varphi^{(3)}(0) = 0$$

D'après le théorème des accroissements finis : $|f^{(5)}(x)| \leq M \Rightarrow |f^{(4)}(x) - f^{(4)}(0)| \leq M|x|$,

d'où $\forall x \in R, |\varphi''(x)| \leq M \frac{x^3}{3}$

Par application successive des accroissements finis,

$$|\varphi''(x) - \varphi''(0)| = |\varphi''(x)| \leq M \frac{|x|^3}{9}, |\varphi'(x) - \varphi'(0)| = |\varphi'(x)| \leq M \frac{x^4}{36} \text{ et } |\varphi(x) - \varphi(0)| \leq M \frac{|x|^5}{180}$$

On applique à $f(x) = M \frac{x^5}{120}$ et $f^{(5)}(x) = M$.

On obtient : $\varphi(x) = M \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{72} M = \frac{x^5}{180} M$

La meilleure constante possible est $\lambda = 1/180$.

Exercice n° 6

Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ deux suites indépendantes de variables de Bernoulli de même paramètre λ , où $0 < \lambda \leq 1/2$. On a :

$$\lambda = P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - P(Y_i = 0).$$

On note L_n la longueur de la plus grande suite Z commune à X et Y .

L'ordre des valeurs dans une suite ne peut pas être changé. Il est possible d'introduire des cases vides entre les valeurs d'une suite pour obtenir la plus grande suite commune.

Par exemple, pour $n=9$, si $X=(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$ et $Y=(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)$, on peut noter :

$X=$	0	0	0	1	0	0			1	0	0
$Y=$	0	0		1	0	0	0	0	1	0	
$Z=$	0	0		1	0	0			1	0	

Et $L_n = 7$.

1. Pour $n=2$, calculer l'espérance de L_2 en fonction de λ .

L_2 peut prendre 3 valeurs : 0, 1 ou 2 et on a au total 16 cas (2 pour la valeur zéro, 10 pour la valeur 1 et 4 pour la valeur 2).

$$E(L_2) = 0 \times 2\lambda^2(1-\lambda)^2 + 1 \times [1 - 2\lambda^2(1-\lambda)^2 - (\lambda^2 + (1-\lambda)^2)^2] + 2 \times (\lambda^2 + (1-\lambda)^2)^2$$

$$E(L_2) = 1 + \lambda^4 + (1-\lambda)^4$$

2. Pour quelle valeur de λ , l'espérance de L_2 est-elle minimale ?

$$\text{Soit } f(\lambda) = 1 + \lambda^4 + (1 - \lambda)^4$$

La dérivée s'annule pour $\lambda = 1/2$

Et on a un minimum pour cette valeur.

3. Quelle est la probabilité que $L_n = n$, sachant que la suite X est fixée avec uniquement trois 1 et que Y a aussi uniquement trois 1 ($n > 3$)?

Pour obtenir $L_n = n$ il faut que les deux suites soient identiques (elles ont la même longueur).

$$\text{Pr ob}(L_n = n) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre total de cas}} = \frac{1}{C_n^3}$$