ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2$^{\text{ème}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} n\, u_n$

2. Donner un exemple de suite (u_n) de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge, mais telle que la suite de terme général $n\,u_n$ ne tende pas vers zéro.

3. Soit σ une application injective de N^* (ensemble des entiers naturels non nuls) dans lui-même. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice n° 2

1. Montrer que pour tout x nombre réel, on a : $1 + x \leq e^x$

2. Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = (1+k)(1+k^2) + ... + (1+k^n)\text{, pour } n \in N^* \text{ et pour } 0 \leq k < 1$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\, Ln(k)}$ (cette question est indépendante des deux précédentes)

Exercice n° 3

1. Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ n nombres réels et $A = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & a_0 \\ 1 & . & . & . & a_1 \\ 0 & . & . & . & . \\ ... & . & . & 0 & . \\ 0 & ... & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice carrée d'ordre n (elle présente des 1 sur la sous diagonale, les a_i sur la dernière colonne et partout ailleurs des zéros). Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Trouver une matrice carrée A d'ordre 4 qui vérifie l'équation : $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$

Exercice n° 4

On rappelle qu'étant donné deux vecteurs x_1 et x_2 de l'espace vectoriel euclidien orienté R^3, il existe un unique vecteur y de R^3 qui vérifie :

$$Det(x_1, x_2, z) = y.z, \ \forall z \in R^3$$

Où $y.z$ désigne le produit scalaire euclidien de ces deux vecteurs et Det le déterminant. Le vecteur y s'appelle le produit vectoriel de x_1 et x_2 et on note $y = x_1 \wedge x_2$.

1. Calculer dans une base orthonormée de R^3, les composantes de y en fonction de celles de x_1 et x_2.

2. On considère un vecteur unitaire w et l'endomorphisme u de R^3 défini par : $u(x) = x \wedge w$

   - Vérifier que $(x \wedge w) \wedge w = (w.x)w - x$

   - Montrer qu'il existe un réel k tel que : $u^3 = ku$

   - En déduire les valeurs propres réelles de u et les sous espaces propres associés.

3. Pour tout réel α, on note φ_α l'application définie sur R^3 par : $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x \wedge w)$

   - Montrer que φ_α est une bijection de R^3

   - Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que $P(\varphi_\alpha) = 0$

   - En déduire l'expression de l'application réciproque de φ_α en fonction de α et u.

Exercice n° 5

Les deux questions sont indépendantes. R_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et C^k les fonctions *k* fois continûment dérivables.

1. Soit $f \in C^2(R_+^*, R)$ telle qu'il existe $l = \underset{x \to 0}{Lim}\, f(x)$ et que dans un voisinage de zéro, $f''(x) \geq -\dfrac{p}{x^2}$, où *p* est une constante positive. Déterminer $\underset{x \to 0}{Lim}\; x f'(x)$

2. Soit $f \in C^5(R, R)$ une fonction impaire qui vérifie :

(1) $f(0) = 0$

(2) $\exists M > 0, \forall x \in R, \left|f^{(5)}(x)\right| \leq M$

Montrer que pour tout réel *x*, on a : $\left|f(x) - \dfrac{x}{3} f'(x)\right| \leq \lambda\, M \left|x\right|$.

Déterminer la meilleure constante possible λ.

Exercice n° 6

Soient $X = (X_1, ..., X_n)$ et $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ deux suites indépendantes de variables de Bernoulli de même paramètre λ, où $0 < \lambda \leq 1/2$. On a :

$$\lambda = P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - P(Y_i = 0).$$

On note L_n la longueur de la plus grande suite *Z* commune à *X* et *Y*.

L'ordre des valeurs dans une suite ne peut pas être changé. Il est possible d'introduire des cases vides entre les valeurs d'une suite pour obtenir la plus grande suite commune. Plusieurs suites - peuvent convenir.

Par exemple, pour *n*=9, si *X*=(0 0 0 1 0 0 1 0 0) et *Y*= (0 0 1 0 0 0 0 1 0), on peut noter :

X=	0	0	0	1	0	0			1	0	0
Y=	0	0		1	0	0	0	0	1	0	
Z=	0	0		1	0	0			1	0	

Et $L_n = 7$.

1. Pour *n*=2, calculer l'espérance de L_2 en fonction de λ.

2. Pour quelle valeur de λ, l'espérance de L_2 est-elle minimale ?

3. Quelle est la probabilité que $L_n = n$, sachant que la suite *X* est fixée avec uniquement trois 1 et que *Y* a aussi uniquement trois 1 (*n*>3) ?