AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Pour n entier naturel, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$. Calculer I_1, I_2 et I_3

On remarque que : $I_n = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx = 1 - J_n$. Puis $J_1 = Ln 2$ et $J_2 = \pi/4$, donc $I_1 = 1 - Ln 2$, $I_2 = 1 - \pi/4$. Pour J_3, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples de la façon suivante : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{1+x}) + \frac{1}{3}(\frac{-x+2}{x^2-x+1})$

D'où $J_3 = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx$, puis on décompose la deuxième expression de la façon suivante : $\frac{-x+2}{x^2-x+1} = -\frac{1}{2}(\frac{2x-1}{x^2-x+1}) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right)$ pour obtenir :

$$J_3 = \frac{1}{3}\left[Ln\ (1+x) - \frac{1}{2}Ln(x^2-x+1) + \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\left[Ln 2 + \sqrt{3}(Arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - Arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}))\right] = \frac{1}{3}\left[Ln 2 + 2\sqrt{3}(Arctg\frac{1}{\sqrt{3}})\right]$$

Et $I_3 = 1 - J_3$

2. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx < 0$, donc la suite est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, alors :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^n}{1+x^n} dx + \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \le (1-\varepsilon) \times \frac{(1-\varepsilon)^n}{1+(1-\varepsilon)^n} + \varepsilon \le (1-\varepsilon)^{n+1} + \varepsilon$$

Pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, $(1-\varepsilon)^{n+1} + \varepsilon < \varepsilon'$ pour $n > \frac{Ln(\varepsilon' - \varepsilon)}{Ln(1-\varepsilon)}$ (cette convergence n'est pas uniforme).

3. Calculer $J = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$; On pose $t = \sqrt[6]{x}$, d'où $t^3 = \sqrt{x}, t^2 = \sqrt[3]{x}, 6t^5\, dt = dx$

Et $J = 6\int_0^1 \frac{t^8}{1+t^2} dt = 6\int_0^1 (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2)} dt = 6(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}) = -\frac{152}{35} + \frac{3\pi}{2}$

Exercice n° 2

1. Soit $K: R \to R$ définie par : $K(t) = \frac{3}{4\sqrt{5}}(1 - \frac{t^2}{5}) I_{[-\sqrt{5},\sqrt{5}]}(t)$ où I désigne la fonction indicatrice (ou caractéristique). Calculer $\int_R K(t)\, dt$ et $\int_R t^2 K(t)\, dt$

On vérifie facilement que $\int_R K(t)\, dt = 1$ et de même $\int_R t^2 K(t)\, dt = 1$

2. Soient λ un paramètre réel et p, f deux entiers naturels non nuls. On pose, pour $t \in [-p, f]$:

$\theta_t = \frac{K(t/\lambda)}{\sum_{t=-p}^{f} K(t/\lambda)}$. Pour $\lambda = p/\sqrt{5}$ et f=p, calculer θ_t en fonction de t et p.

On a : $K(t/\lambda)=\dfrac{3}{4\sqrt{5}}(1-\dfrac{t^2}{p^2})$, puis $\theta_t=\dfrac{K(t/\lambda)}{\sum\limits_{t=-p}^{p}K(t/\lambda)}=\dfrac{3p}{4p^2-1}(1-\dfrac{t^2}{p^2})$ en utilisant le fait que

$$\sum_{-p}^{p}t^2=2\sum_{1}^{p}t^2=\frac{1}{3}p(p+1)(2p+1)$$

3. On suppose seulement que $\lambda=p/\sqrt{5}$, calculer θ_t en fonction de t , f et p.
Pour cette question la démarche est analogue à celle de la question précédente, pour obtenir :

$$\theta_t=\frac{K(t/\lambda)}{\sum\limits_{t=-p}^{f}K(t/\lambda)}=\left(\frac{1-\dfrac{t^2}{p^2}}{p+f+1-\dfrac{S}{p^2}}\right),\text{ où } S=\frac{1}{6}\times\left[p(p+1)(2p+1)-f(f+1)(2f+1)\right]$$

4. Comment peut-on interpréter K ?
K est une fonction positive, paire et qui vérifie $\int_R K(t)\,dt=1$, elle peut donc être utilisée comme la densité d'une loi de probabilité.

Exercice n° 3

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant :

$f\circ f=\lambda f$, où λ est un réel non nul.

On note $L_\lambda=\{f|f\circ f=\lambda f\}$.

1. Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

Supposons que f soit la composée d'une projection p et d'une homothétie h, on a $p\circ p=p$ et $h=\lambda Id$. On obtient $f(x)=p\circ h(x)=\lambda p(x)$. On pose donc $p(x)=\dfrac{1}{\lambda}f(x)$ et $h(x)=\lambda x$ avec $\lambda\neq 0$. On vérifie que $f\circ f=\lambda f$. Donc pour toute $f\in L_\lambda$ on pose $f=p\circ h=h\circ p$

2. Montrer que pour toute fonction f de L_λ, le noyau de f et l'image de f sont deux sous espaces supplémentaires de E. Soit $y\in \operatorname{Im} f\cap Ker\, f$. On obtient : $f(y)=0$ et $\exists x\in E\,/\,y=f(x)$, d'où $f(y)=f^2(x)=0=\lambda f(x)$ et $y=f(x)=0$

3. Soit $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$
$(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $(f+g)\circ(f+g) = \lambda(f+g)$ ou encore $f \circ g + g \circ f = 0$.

Si $f \circ g = g \circ f$, il est clair que $(f+g) \in L_\lambda$.
Réciproquement, on a $f \circ g + g \circ f = 0$ (1)
On multiplie (1) par f à droite, puis à gauche,

$$\begin{cases} \lambda(g \circ f) + f \circ g \circ f = 0 \\ f \circ g \circ f + \lambda(f \circ g) = 0 \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient $f \circ g - g \circ f = 0$ (2).
La résolution du système (1) et (2) donne le résultat demandé.

4. Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2. $(g \circ f)\circ(g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (g \circ f) \circ f = (g \circ g)\circ(f \circ f) = \lambda_1 \lambda_2 (g \circ f)$, donc $\mu = \lambda_1 \lambda_2$.

5. Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à une famille de L_λ et vérifiant $(u - a \times Id)\circ(u - b \times Id) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.
Montrer que $v = u - a \times Id$ et $w = u - b \times Id$ appartiennent à des familles de L_λ.
Ecrire u sous la forme $\alpha v + \beta w$ et en déduire u^n.

$v \circ v \in L_\lambda \Leftrightarrow (u - aI)\circ(u - aI) = \lambda v \Leftrightarrow u^2 - 2au + a^2 I = \lambda(u - aI)$

Par hypothèse, $u^2 - (a+b)u + abI = 0$, d'où $u^2 = (a+b)u - abI$. On trouve donc $\lambda = b - a$.
De même $w \circ w \in L_\mu$ avec $\mu = a - b$.

Par ailleurs, $u = \alpha v + \beta w \Leftrightarrow u = \alpha(u - aI) + \beta(u - bI)$. Ceci est vérifié pour $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = 0$, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{b}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{-a}{b-a}$$

On a $u^n = \alpha^n v^n + \beta^n w^n$ car $v \circ w = w \circ v = 0$.
D'autre part $v^n = \lambda^{n-1} v$ et $w^n = \mu^{n-1} w$. On obtient :

$$u^n = \frac{b^n}{b-a} v - \frac{a^n}{b-a} w$$

6. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $(A-aI)(A-bI)=0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n.

$\det(A-\lambda I)=(\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$, d'où d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$A^2-A-2I=(A+I)(A-2I)$$

On obtient, par exemple, $a=-1$ et $b=2$.

$$A^n=\frac{2^n}{3}(A+I)-\frac{(-1)^n}{3}(A-2I)=\frac{(2^n-(-1)^n)}{3}A+\frac{(2^n+2(-1)^n)}{3}I$$

Exercice n° 4

Soit $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\-1&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A

On a : $Det(A-\lambda I)=(2-\lambda)^3$ et 2 est une valeur propre de multiplicité 3.

2. Calculer $(A-2I)^3$. En déduire l'inverse de A (si son inverse existe)
On peut calculer directement l'expression ou d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $(A-2I)^3=0$. Comme le déterminant de cette matrice est non nulle, la matrice est inversible puis en développant d'après la formule du binôme, on obtient, à partir de $(A-2I)^3=0$,

$$A^{-1}=\frac{1}{8}(A^2-6A+12I)\text{ et }A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&1&5\\2&-3&9\end{pmatrix}$$

3. Trouver une base dans laquelle la matrice A est semblable à la matrice $M=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Si (e_1, e_2, e_3) est un est une telle base, elle doit vérifier : $Ae_1 = 2e_1, Ae_2 = e_1 + 2e_2, Ae_3 = e_2 + 2e_3$.

Le premier vecteur est onc un vecteur propre associé à la valeur propre 2, il faut donc résoudre le système correspondant :

$\begin{cases} 3x + z = 2x \\ -x + 3y - 2z = 2y \\ -x + y = 2z \end{cases}$ et on obtient : $x=-z$, $y=-x$. On peut choisir $e_1 = (-1,1,1)$. On peut remarquer que le sous espace propre associé est de dimension 1 et que la matrice n'est pas diagonalisable.

On cherche ensuite les deux autres vecteurs en résolvant les systèmes associés pour obtenir :

$$e_2 = (0,-1,-1) \text{ et } e_3 = (0,-1,0)$$

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base, à savoir $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme les deux matrices sont semblables, on a la relation : $A = PMP^{-1}$ et $A^n = PM^nP^{-1}$.

On calcule ensuite la matrice inverse de P, à savoir $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Il reste à calculer M^n .

On a : $M = 2I + J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

Donc $M^n = (2I + J)^n = 2^n\, I + n2^{n-1}\, J + n(n-1)\,2^{n-1}\, J^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Puis en effectuant les produits, on obtient :

$$A^n == 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2+n & n(n-1) & n(2-n) \\ -n & n^2-2n-2 & n(n-3) \\ -n & n(2-n) & (n-1)(n-2) \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5

Pour n un entier naturel non nul et $x \in R$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$

1. Calculer $\underset{n \to +\infty}{Lim} f_n(x)$

   Pour $x \neq 0$, $\underset{n \to +\infty}{Lim} f_n(x) = \underset{n \to +\infty}{Lim} \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1 - \frac{x^2}{2n^2})} = \underset{n \to +\infty}{Lim} \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 n^2} = 0$

   Et $\underset{n \to +\infty}{Lim} f_n(0) = +\infty$

2. Soit g une fonction continue sur R et nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$, déterminer $\underset{n \to +\infty}{Lim} \int_R g(x) f_n(x)\, dx$

   L'intégrale $\int_R g(x) f_n(x)\, dx = \int_a^b g(x) f_n(x)\, dx$ est bien définie. En posant $x = t/n$, on obtient

   $$\int_R g(x) f_n(x)\, dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(t/n)\, dt = \int_R h_n(t)\, dt$$

   avec $h_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \dfrac{t^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(t/n)\, I_{[na, nb]}(t)$

   Pour n assez grand tel que $a/n, b/n \leq 1$ on a pour tout $t \in [na, nb]$, $\left|t^2/2n^4\right| \leq 1/2 < 1$,

   $|h_n(t)| = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 Ln(1 - t^2/2n^4)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} = \varphi(t)$. Cette inégalité reste encore valable pour $t \notin [na, nb]$.

   La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur R, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et conclure $\underset{n \to +\infty}{Lim} \int_R g(x) f_n(x)\, dx = g(0)$, sachant que $\int_R e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

Exercice n° 6

Soit la suite (u_n) de nombre réels, décroissante et positive.

1. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$

On remarque que : $v_n \geq u_{2^n} + u_{2^n+1} + ... + u_{2^{n+1}-1}$ (car la suite (u_n) est décroissante et dans le deuxième terme de cette inégalité, il y a 2^n termes), de sorte que : $\sum_0^n v_k \geq \sum_0^{2^{n+1}-1} u_k$

Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

De même, $u_{2^n} + u_{2^n+1} + ... + u_{2^{n+1}-1} \geq \frac{1}{2} v_{n+1}$, d'où $\sum_0^{2^{n+1}-1} u_k \geq \frac{1}{2} \sum_1^{n+1} v_k$, par conséquent si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge aussi.

Les deux séries sont donc de même nature.

2. On suppose de plus que la suite (u_n) converge vers zéro. On pose : $w_n = n^2 u_{n^2}$.

A-t-on un lien entre la convergence des deux séries de termes généraux (u_n) et (w_n) ?

Si la série de terme général w_n converge. Pour $n^2 \leq k < (n+1)^2, 0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{u_n}{n^2}$. On obtient : $\sum_{n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq w_n \frac{(n+1)^2}{n^2}$, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ est majorée donc elle converge.

La réciproque est fausse. Pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, cette série est convergente, donc $w_n = \frac{1}{n}$, et la série est divergente.

Exercice n° 7

Soit $f: U \to R$ de classe C^1, où U est une partie de R^n.

On dit qu'une direction $\delta \in R^n$ est admissible pour f en $x \in U$ s'il existe $\overline{\alpha} > 0$ tel que : $x + \alpha\delta \in U$ pour tout α vérifiant $0 \le \alpha \le \overline{\alpha}$.

1. Si x^* réalise un minimum relatif pour f sur U et δ une direction admissible en x^*, que peut-on dire du produit scalaire $\langle df(x^*), \delta \rangle$, où $df(x^*)$ désigne la différentielle de f en x^* ?

Pour tout α vérifiant $0 \le \alpha \le \overline{\alpha}$, $x^* + \alpha\delta \in U$.

Soit $g(\alpha) = f(x^* + \alpha\delta)$ la fonction définie sur $[0, \overline{\alpha}]$ et à valeurs réelles. Cette fonction admet un minimum relatif en $\alpha = 0$ (car x^* réalise un minimum relatif pour f). Comme g est aussi de classe C^1 : $g(\alpha) - g(0) = g'(0)\alpha + o(\alpha)$.

Si $g'(0) < 0$ alors $g(\alpha) - g(0) < 0$, ce qui est contraire au minimum relatif. Donc $g'(0) = \langle df(x^*), \delta \rangle \ge 0$.

2. Si $U = R^n$, que peut-on dire de $df(x^*)$?

Dans ce cas, toutes les directions sont admissibles et x^* est un minimum absolu, donc $df(x^*) = 0$.