ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Pour n entier naturel, on pose Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$. Calculer I_1 , I_2 et I_3.

2. Etudier la convergence de la suite (I_n) et calculer sa limite si elle existe.

3. Calculer $J = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

Exercice n° 2

1. Soit $K : R \to R$ définie par : $K(t) = \frac{3}{4\sqrt{5}}(1-\frac{t^2}{5})\,I_{[-\sqrt{5},\sqrt{5}]}(t)$ où I désigne la fonction indicatrice (ou caractéristique). Calculer $\int_R K(t)\,dt$ et $\int_R t^2 K(t)\,dt.$

2. Soient λ un paramètre réel et p, f deux entiers naturels non nuls. On pose, pour $t \in [-p, f]$:

$\theta_t = \frac{K(t/\lambda)}{\sum_{t=-p}^{f} K(t/\lambda)}$. Pour $\lambda = p/\sqrt{5}$ et f=p, calculer θ_t en fonction de t et p.

3. On suppose seulement que $\lambda = p/\sqrt{5}$, calculer θ_t en fonction de t, f et p.

4. Comment peut-on interpréter K ?

Exercice n° 3

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E vérifiant :

$$f \circ f = \lambda f \text{, où } \lambda \text{ est un paramètre réel non nul.}$$

On note $L_\lambda = \{f | f \circ f = \lambda f\}$.

1. Montrer que toute fonction de L_λ est la composée d'une projection et d'une homothétie de rapport λ.

2. Montrer que pour toute fonction f de L_λ, le noyau de f et l'image de f sont deux sous espaces supplémentaires de E.

3. Soit $f, g \in L_\lambda$. Montrer que $(f+g) \in L_\lambda$ si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0$.

4. Soient $f \in L_{\lambda_1}$ et $g \in L_{\lambda_2}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $g \circ f \in L_\mu$, où μ dépend de λ_1 et λ_2.

5. Soit u un endomorphisme de E n'appartenant pas à L_λ et vérifiant $(u - a \times Id) \circ (u - b \times Id) = 0$, où a et b sont deux réels distincts et Id désigne l'application identique.

Montrer que $v = u - a \times Id$ et $w = u - b \times Id$ appartiennent à L_λ.
Ecrire u sous la forme $\alpha v + \beta w$ (on précisera les valeurs de α et β) et en déduire u^n.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut trouver deux réels a et b tels que $(A - aI)(A - bI) = 0$ où I est la matrice unité. En déduire A^n.

Exercice n° 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Calculer $(A-2I)^3$. En déduire l'inverse de A (si son inverse existe).

3. Trouver une base dans laquelle la matrice A est semblable à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice n° 5

Pour n un entier naturel non nul et $x \in R$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$.

1. Calculer $\underset{n \to +\infty}{Lim} f_n(x)$

2. Soit g une fonction continue sur R et nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$, déterminer $\underset{n \to +\infty}{Lim} \int_R g(x) f_n(x)\, dx$

Exercice n° 6

Soit la suite (u_n) de nombre réels, décroissante et positive.

1. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ en fonction de celle de $\sum_{n \geq 1} u_n$

2. On suppose de plus que la suite (u_n) converge vers zéro. On pose : $w_n = n^2 u_{n^2}$.
A-t-on un lien entre la convergence des deux séries de termes généraux (u_n) et (w_n) ?

Exercice n° 7

Soit $f : U \to R$ de classe C^1, où U est une partie de R^n.

On dit qu'une direction $\delta \in R^n$ est admissible pour f en $x \in U$ s'il existe $\overline{\alpha} > 0$ tel que : $x + \alpha\delta \in U$ pour tout α vérifiant $0 \leq \alpha \leq \overline{\alpha}$.

1. Si x^* réalise un minimum relatif pour f sur U et si δ est une direction admissible pour f en x^*, que peut-on dire du produit scalaire $\langle df(x^*), \delta \rangle$, où $df(x^*)$ désigne la différentielle de f en x^* ?

2. Si $U = R^n$, que peut-on dire de $df(x^*)$?