

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.



Exercice n° 1

Pour n entier naturel, la fonction réelle f_n est définie par : $f_n(x) = \frac{x^2 + nx + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de f_0 et donner l'allure de son graphe.
2. Le graphe de la fonction f_0 admet-il un centre de symétrie ? Si oui, préciser ce centre.
3. La fonction f_n admet-elle un point fixe ? un centre de symétrie ?
4. Calculer $I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx$
5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ pour tout n et en déduire sa limite.

Exercice n° 2

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow R$ définie par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Etudier la convergence des intégrales : $\int_0^1 f(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

3. Etudier la suite (u_n) de nombre réels définie par : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ et $u_0 > 0$
4. Etudier la suite (w_n) de nombre réels définie par : $w_{n+1} = w_n \cdot f(w_n)$ et $w_0 > 0$

Exercice n° 3

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice M .
2. Etudier la diagonalisation de la matrice M .
3. Calculer M^n pour tout entier n .
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$

Exercice n° 4

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f
2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point.
3. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f .
4. Etudier la différentiabilité de f .

Exercice n° 5

On considère n valeurs réelles $x_i, i = 1$ à n , strictement positives et telles que : $x_i < x_{i+1}$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$. Soit α un paramètre réel.

1. Résoudre le problème d'optimisation suivant : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2$

2. On suppose que $\alpha \geq x_n$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha|$.
On notera m_1 la valeur de ce minimum et α_1 son argument.
3. On suppose que $\alpha \leq x_1$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha|$.
On notera m_2 la valeur de ce minimum et α_2 son argument.
4. Comparer m_1 et m_2 .

Exercice n° 6

Soient q_1 et q_2 deux applications définies sur $M_n(R)$ respectivement par :

$$q_1(A) = (Tr(A))^2 \text{ et } q_2(A) = Tr({}^tAA),$$

où $M_n(R)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,

$Tr(A)$ la trace d'une matrice A de $M_n(R)$ et tA la transposée de A .

1. Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques.
2. q_1 et q_2 sont-elles positives ? définies positives ?

Exercice n° 7

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \begin{cases} a \cdot 3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a \cdot 3^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, où a est un paramètre réel

1. Déterminer le paramètre a pour que f soit la densité d'une loi de probabilité.
2. Soit X la variable aléatoire dont f est la densité. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Calculer, si elle existe, l'espérance de X .
4. Soit $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de Y et son espérance, si elle existe.

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Pour n entier naturel, la fonction réelle f_n est définie par : $f_n(x) = \frac{x^2 + nx + 1}{x + 1}$

1. Etudier les variations de f_0 et donner l'allure de son graphe.

La fonction est définie pour $x \neq -1$ et sa dérivée est égale à : $f_0'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$.

Son numérateur admet deux racines : $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_0(x) - x) = -1$ donc la fonction admet une asymptote oblique d'équation : $y = x - 1$ (de même pour moins l'infini).

La fonction est strictement croissante de $]-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ sur $]-\infty, f_0(-1 - \sqrt{2})]$,

La fonction est strictement décroissante de $[-1 - \sqrt{2}, -1[$ sur $[f_0(-1 - \sqrt{2}), -\infty[$,

La fonction est strictement décroissante de $] -1, -1 + \sqrt{2}]$ sur $] +\infty, f_0(-1 + \sqrt{2})]$,

La fonction est strictement croissante de $] -1 + \sqrt{2}, +\infty[$ sur $] f_0(-1 + \sqrt{2}), +\infty[$,

2. Le graphe de la fonction f_0 admet-il un centre de symétrie ? Si oui, préciser ce centre.

La fonction f_0 admet le point A (-1, -1) comme centre de symétrie. En effet, si on pose :

$X = x + 1$ et $Y = y + 1$, on obtient : $Y = X + \frac{2}{X}$ qui est impaire.

3. La fonction f_n admet-elle un point fixe ?, un centre de symétrie ?

Un point fixe vérifie l'équation : $f_n(x) = x$ ou encore : $x = \frac{1}{1-n}$, si n est différent de 1.

Par ailleurs, $f_n(x) = x + (n-1) + \frac{2-n}{x+1}$. Si on pose : $X = x + 1$ et $Y = y + (1-n)$, on obtient :

$Y = X + \frac{2-n}{X}$ qui est impaire et le point B (-1, n-1) est un centre de symétrie.

4. Calculer $I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx$

$$I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x+1)\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 2 \ln 2$$

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ pour tout n et en déduire sa limite.

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(x + n - 1 + \frac{2-n}{x+1}\right) dx = n - \frac{1}{2} + (2-n) \ln 2 = -\frac{1}{2} + 2 \ln 2 + n(1 - \ln 2) \text{ et sa}$$

limite est égale à $+\infty$, car $(1 - \ln 2) > 0$.

Exercice n° 2

Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

On a : $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

Sa dérivée est égale à : $\frac{1}{x^3} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \left(-2 \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + x - 1\right)$.

Posons $z = \left(-2 \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + x - 1\right)$ alors $z' = \frac{2-x}{x}$, d'où $z < 0$ pour tout x strictement positif.

La fonction est donc strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. La droite $y=1$ est une asymptote horizontale et l'axe Oy une asymptote verticale.

2. Etudier la convergence des intégrales : $\int_0^1 f(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

En 0 : $\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \approx x^2 - \ln x$ et $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \approx e \cdot e^{-\frac{\ln x}{x^2}} \rightarrow +\infty$, ceci ne permet pas de conclure, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} x^2 f(x) = +\infty$, donc $f(x) > \frac{1}{x^2}$ et l'intégrale est divergente en 0.

En $+\infty$: Si $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ existe (finie ou non), alors

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Mais ici, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 1$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est aussi divergente.

3. Etudier la suite (u_n) de nombre réels définie par : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ et $u_0 > 0$

On vérifie facilement par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs et donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ et la suite est croissante. Si la suite (u_n) converge vers une limite l alors l est solution de l'équation : $l = f(l)$, d'où $\frac{1}{l} = 0$, ce qui est impossible et la suite est donc divergente.

4. Etudier la suite (w_n) de nombre réels définie par : $w_{n+1} = w_n \times f(w_n)$ et $w_0 > 0$

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = f(w_n)$ et si la suite est convergente vers une limite l , alors l est solution de l'équation : $1 = f(l)$ qui n'a pas de solution réelle (d'après la question 1), donc la suite est divergente.

Exercice n° 3

Soit $M = \begin{pmatrix} p & q/2 & q/2 \\ q/2 & p & q/2 \\ q/2 & q/2 & p \end{pmatrix}$, où $p, q > 0$ et $p + q = 1$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice M .

$\det(M - \lambda I) = (1 - \lambda)(p - q/2 - \lambda)^2$, d'où $\lambda = 1$ est une valeur simple et $\lambda = p - q/2 = \frac{3p-1}{2}$ est une valeur double.

2. Etudier la diagonalisation de la matrice M .

Si $p - q/2 = 1$, ce qui est impossible car $p + q = 1$.

Si $p - q/2 \neq 1$, la matrice M est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = p - q/2$ est égale à deux.

On trouve deux vecteurs propres associés : $u_2(1, -1, 0)$ et $u_3(0, -1, 1)$. Et $u_1(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

M est diagonalisable et semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p - q/2 & 0 \\ 0 & 0 & p - q/2 \end{pmatrix}$

3. Calculer M^n pour tout entier n .

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}, \text{ avec } \Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (p-q/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (p-q/2)^n \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On obtient } M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2(p-q/2)^n & 1-(p-q/2)^n & 1-(p-q/2)^n \\ 1-3(p-q/2)^n & 1 & 1+3(p-q/2)^n \\ 1+(p-q/2)^n & 1+(p-q/2)^n & 1-2(p-q/2)^n \end{pmatrix}$$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$

$$\text{On vérifie aisément que } \left| p - \frac{q}{2} \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 4

$$\text{Soit } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par : } f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Pour tout le problème les difficultés se situent sur la droite $y=0$, en dehors, la fonction est indéfiniment différentiable.

1. Etudier la continuité de f

Le problème de la continuité se situe sur la droite $y=0$. Donc $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 = f(x, 0)$ et f est continue.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point.

$$\text{Pour } y \neq 0, f'_x(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } f'_y(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pour $y=0$:

$$f'_x(x_0, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{et} \quad f'_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{x}{y} = 0.$$

Ces deux dérivées partielles existent et sont nulles.

3. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f .

On a : $\lim_{y \rightarrow 0} f'_x(x, y) = 0 = f'_x(x, 0)$ et cette dérivée partielle est continue.

Par contre, $\lim_{y \rightarrow 0} f'_y(x, y)$ n'existe pas et nous n'avons pas la continuité.

4. Etudier la différentiabilité de f .

Si f est différentiable en un point $(x_0, 0)$, alors sa différentielle est nulle.

Si $x_0 = 0$, f est différentiable en $(x_0, 0)$ si et seulement si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Ce qui est

vérifié par passage en coordonnées polaires, puisque le numérateur est en r^2 et le dénominateur en r .

Si $x_0 \neq 0$, f est différentiable en $(x_0, 0)$ si et seulement si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x - x_0, y)\|} = 0$, ce qui est vérifié car le numérateur est en y^2 .

Exercice n° 5

On considère n valeurs réelles x_i strictement positives et telles que : $x_i < x_{i+1}$ pour tout i compris entre 1 et $n-1$. Soit α un paramètre réel.

1. Résoudre le problème d'optimisation suivant : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2$

La fonction f définie par : $f(\alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2$ est convexe strictement donc elle admet un minimum pour la valeur qui annule sa dérivée.

$$f'(\alpha) = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha) = -2 \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - n\alpha \right] \text{ qui est nulle pour } \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ (moyenne).}$$

2. On suppose que $\alpha \geq x_n$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha|$. On notera m_1 la valeur de ce minimum et α_1 son argument.

$$\text{Soit } \varepsilon_i(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > x_i \\ -1 & \text{si } \alpha < x_i \end{cases} \text{ et posons } g(\alpha) = \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\alpha)(\alpha - x_i) \geq 0$$

Comme $\alpha \geq x_n$, $\alpha \geq x_i$ et $\varepsilon_i(\alpha) = 1$, d'où $g(\alpha) = \sum_{i=1}^n (\alpha - x_i) = n\alpha - \sum_{i=1}^n x_i$ et cette valeur est minimale pour $\alpha_1 = x_n$

3. On suppose que $\alpha \leq x_1$. Résoudre dans ce cas, le problème : $\min_{\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i - \alpha|$. On notera m_2 la valeur de ce minimum et α_2 son argument.

Par un raisonnement analogue à la question précédente, on obtient : $\alpha_2 = x_1$

4. Comparer m_1 et m_2 .

De la question 2, on obtient $m_1 = n(x_n - \bar{X})$, où $\bar{X}$ désigne la moyenne des x_i

De la question 3, on obtient $m_2 = n(\bar{X} - x_1)$.

Par conséquent $m_1 > m_2$ si et seulement si $\frac{x_1 + x_n}{2} > \bar{X}$

Exercice n° 6

Soient q_1 et q_2 deux applications définies sur $M_n(R)$ respectivement par :

$$q_1(A) = (Tr(A))^2 \text{ et } q_2(A) = Tr({}^tAA), \text{ où}$$

$M_n(R)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,

$Tr(A)$ désigne la trace d'une matrice A de $M_n(R)$ et tA la transposée de A .

1. Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques.

Il suffit de trouver les formes bilinéaires symétriques associées.

On a : $\varphi_1(A, B) = \frac{1}{4}[(Tr(A+B))^2 - (Tr(A-B))^2] = Tr(A).Tr(B)$ et on vérifie que c'est une forme bilinéaire symétrique.

De même, $\varphi_2(A, B) = Tr({}^tBA)$.

2. q_1 et q_2 sont-elles positives ?, définies positives ?

φ_1 est positive mais non définie positive car pour $n > 1$, la matrice A qui ne comporte que des zéros sauf un 1 pour le terme en haut à droite est non nulle et pourtant $\varphi_1(A) = 0$

Pour φ_2 , si $A = (a_{ij})$ et si ${}^tAA = (b_{ij})$, on a : $b_{kk} = \sum_{l=1}^n a_{kl}^2$, d'où $\varphi_2(A) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}^2$, donc

$\varphi_2(A) \geq 0$ et $\varphi_2(A) > 0$ dès que la matrice est non nulle.

Exercice n° 7

Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \begin{cases} a \cdot 3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a \cdot 3^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Déterminer le paramètre a pour que f soit la densité d'une loi de probabilité.

On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 = a \int_{-\infty}^0 3^x dx + a \int_0^{+\infty} 3^{-x} dx$

On a : $\int_0^{+\infty} 3^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x \ln 3} dx = \frac{1}{\ln 3}$ et $\int_{-\infty}^0 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}$, donc f est une densité de probabilité si $a = \frac{\ln 3}{2}$. Dans ce cas, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

2. Soit X la variable aléatoire dont f est la densité. Déterminer la fonction de répartition de X .

Si $x < 0$, $F(x) = \frac{\ln 3}{2} \int_{-\infty}^x e^{t \ln 3} dt = \frac{3^x}{2}$ et si $x \geq 0$, $F(x) = F(0) + \int_0^x e^{-t \ln 3} dt = 1 - \frac{3^{-x}}{2}$

3. Calculer, si elle existe l'espérance de X .

Par définition, l'espérance est : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

La fonction $x f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de l'infini, donc intégrable.

Et comme $x f(x)$ est impaire, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0$

4. Soit $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de Y et son espérance, si elle existe. Y prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels positifs, on a :

$$P(Y \leq x) = P(3^X \leq x) = P(X \leq \frac{\ln x}{\ln 3})$$

Si $0 \leq x \leq 1$, $F_Y(x) = \frac{1}{2} 3^{\ln x / \ln 3} = \frac{x}{2}$

Si $x > 1$, $F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2} 3^{-\ln x / \ln 3} = 1 - \frac{1}{2x}$

Pour $x > 1$, la densité de Y est : $f_Y(x) = F_Y'(x) = \frac{1}{2x^2}$. Au voisinage de l'infini, $x f(x)$ est équivalente à $\frac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable, donc l'espérance de Y n'existe pas.