ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL



AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

***Dans toute cette épreuve, $R$ désigne l'ensemble des nombres réels.***

## Exercice n° 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver un polynôme *P* de degré 2 ayant deux racines réelles distinctes tel que *P(A)=0.*

2. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P(X)$, où *n* est un entier naturel strictement supérieur à 2.

3. Pour *n* entier positif ou nul, calculer $A^n$ et résoudre le système : $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Exercice n° 2

Soit $f : ]0,+\infty[ \to R$ définie par : $f(x) = x^{-5}\left(e^{1/x} - 1\right)^{-1}$

1. Calculer la limite de *f* en zéro et en $+\infty$. Montrer que *f* admet un maximum.

2. Soit $x_0 = Arg\max(f)$, montrer que $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

3. Soit $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right)$. Montrer que l'équation $5x\ (e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$, où $x>0$, est équivalente à $g(t) = t$, où $t$ est strictement positif.

4. Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha$ de l'équation $g(t) = t$, avec $\alpha \in [4,5]$

5. En déduire que $f$ possède un unique maximum.



**Exercice n° 3**

On considère $A$ et $B$ deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre $n$ (entier strictement positif).

1. Montrer que la matrice $AB$-$BA$ n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

2. On suppose de plus que $A$ et $B$ sont définies positives, étudier le signe de $Tr(AB)$, où $Tr$ désigne la trace de la matrice.

3. Soit $M$ une matrice carrée antisymétrique réelle. Montrer que $I+M$ est inversible et déterminer la nature de la matrice $(I - M)(I + M)^{-1}$ .

**Exercice n° 4**

On considère les suites $(u_n)$ et $(\lambda_n)$, $n \geq 1$, définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}};\ \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{u_{n+1}}$$

1. Montrer que pour $u_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$, il existe deux autres suites $(\theta_n)$ et $(\alpha_n)$ telles que pour tout entier $n$ strictement positif, on a :

   $u_n = \cos(\theta_n);\ \lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n);\ 0 \leq \theta_n \leq \pi / 2$.

   Montrer que la suite $(\lambda_n)$ est convergente, on précisera sa limite.

2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité :

   $|\pi - \lambda_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6 \times 8^n}$. En déduire un entier $N$ tel que : $|\pi - \lambda_N| \leq 10^{-6}$

**Exercice n° 5**

On considère l'espace vectoriel $R^4$ rapporté à une base orthonormée $B$. On désigne par $(x, y, z, t)$ les composantes d'un vecteur dans cette base. Soit $f$ l'endomorphisme de $R^4$, associé, dans la base $B$, à la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



1. Déterminer l'image de $f$.
2. La matrice $M$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale semblable.
3. Quel est le rang de la forme quadratique définie sur $R^4$ par :

   $$q(x,y,z,t) = 4z^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 4yz + 4zt$$

4. On considère le système d'équations :

   $$\begin{cases} y + z + t = 1 \\ x + 2z = m^2 + 1 \\ x + 2y + 4z + 2t = p + 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 2 \end{cases}$$ , où $m$ et $p$ sont des paramètres réels.

   Résoudre le système homogène associé
   Discuter l'existence de solutions de ce système en fonction de $m$ et $p$.

**Exercice n° 6**

Soient $f$ et $g$ deux applications numériques définies sur $]0,+\infty[$ , où $f$ est convexe et $g$ affine.

On suppose que :

(1) $\forall x > 0,\ f(x) \leq g(x)$ et
(2) $f(1) = g(1)$

Comparer $f$ et $g$.

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

## Exercice n° 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Trouver un polynôme *P* de degré 2 ayant deux racines réelles distinctes tel que *P(A)=0.*

   On vérifie que $P(A) = A^2 + A - 2I = 0$ (Cayley-Hamilton), en calculant $Det(A - \lambda I)$

2. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P(X)$, où *n* est un entier naturel strictement supérieur à 2.

   Le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P(X)$ est un polynôme de degré 1.

   $X^n = (X^2 + X - 2I)Q(X) + aX + b$

   Pour *X*=1, on obtient *a*+*b*=1

   Pour *X*=-2, on obtient $(-2)^n = -2a + b$

   En conclusion : $a = \frac{1-(-2)^n}{3}; b = \frac{2+(-2)^n}{3}$

3. Pour *n* entier strictement positif, calculer $A^n$ et résoudre le système : $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   On a : $A^n = (A^2 + A - 2I)Q(A) + aA + bI$ et $A^2 + A - 2I = 0$, donc

$$A^n = aA + bI = \begin{pmatrix} b-a & a & a \\ a & b-a & a \\ a & a & b-a \end{pmatrix}$$

La résolution du système donne $U_n = A^n U_0$ et plus précisément

$$\begin{cases} x_n = b-a = \frac{1}{3}(1+(-1)^n 2^{n+1}) \\ y_n = 3a-b = \frac{1}{3}(1-(-1)^n 2^{n+2}) \\ z_n = b-a = \frac{1}{3}(1+(-1)^n 2^{n+1}) \end{cases}$$

## Exercice n° 2

Soit $f : ]0,+\infty[ \to R$ définie par : $f(x) = x^{-5}\left(e^{1/x} - 1\right)^{-1}$

1. Calculer la limite de *f* en zéro et en plus l'infini. Montrer que *f* admet un maximum.

   $\underset{x\to 0^+}{Lim}\ f(t) = \underset{x\to+\infty}{Lim} \frac{x^5}{e^x - 1} = 0$, et $\underset{t\to+\infty}{Lim}\ f(t) = \underset{x\to 0^+}{Lim} \frac{x^5}{e^x - 1} = \underset{x\to 0^+}{Lim} \frac{5x^4}{e^x} = 0$, d'après la règle de l'Hôpital. Du fait des limites précédentes, de la continuité et de la positivité de *f*, elle admet un maximum.

2. Soit $x_0 = Arg\max(f)$, montrer que $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

   *f* est dérivable, donc si $x_0$ réalise un maximum pour f, on doit avoir :

   $$f'(x_0) = -5x_0^{-6}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-1} + x_0^{-5}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-2} e^{\frac{1}{x_0}} x_0^{-2} = -x_0^{-7}\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right)^{-2}\left(5x_0\left(e^{\frac{1}{x_0}} - 1\right) - e^{\frac{1}{x_0}}\right)$$

   Donc $f'(x_0) = 0$ si et seulement si $5x_0(e^{1/x_0} - 1) - e^{1/x_0} = 0$

3. Soit $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right)$. Montrer que l'équation $5x\,(e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$, $x>0$ est équivalente à $g(t) = t$, où *t* est strictement positif.

   On pose $x = \frac{1}{t}$ et l'équation $5x\,(e^{1/x} - 1) - e^{1/x} = 0$ est équivalente à $g(t) = 5\left(1 - e^{-t}\right) = t$

4. Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha$ de l'équation $g(t) = t$ dans l'intervalle $[4,5]$

On a $g^{'}(t) = 5\left(e^{-t}\right) > 0$, donc $g$ est strictement croissante. Puis $g(4) \cong 4{,}90 > 4$ ; $g(5) \cong 4{,}96 < 5$. Ainsi $g([4,5]) \subset [4,5]$ et $\underset{[4,5]}{Sup}\, g^{'}(t) = 5e^{-4} < 1$, on a donc une contraction et d'après le théorème du point fixe , il existe une unique solution à l'équation $g(t) = t$ dans l'intervalle $[4,5]$.

Pour $t < \ln 5$, $g^{'}(t) < 1$, alors la fonction $g(t) - t$ est strictement croissante pour $t < \ln 5$
Comme $g(0) = 0$, on a : $g(t) > t$ pour $t < \ln 5$
Pour $t > \ln 5$, la fonction $g(t) - t$ est strictement décroissante, donc elle admet au plus une racine qui doit être celle trouvée à la question précédente dans l'intervalle $[4,5]$.
On peut aussi étudier directement $h(t) = g(t) - t$

5. Déduire que $f$ possède un unique maximum.

   On sait que $f$ possède un maximum et qu'il est unique d'après la question précédente : $x_0 = \dfrac{1}{\alpha}$

**Exercice n° 3**

On considère *A* et *B* deux matrices carrées symétriques réelles d'ordre *n* (entier strictement positif)

1. Montrer que la matrice *AB-BA* n'a que des valeurs propres imaginaires pures.

   On vérifie que *AB-BA* est une matrice antisymétrique. Posons *C=AB-BA*. Cette matrice est diagonalisable dans l'ensemble des nombres complexes. Si $\lambda$ est une valeur propre complexe et *u* un vecteur propre associé, on a : $Cu = \lambda u$.

   D'où $\overline{u}^{'} Cu = \lambda \overline{u}^{'} u = \lambda \|u\|^2$ et $\overline{u}^{'} C^{'} u = -\lambda \|u\|^2$ (i).

   Par ailleurs, $(Cu)^{'} = (\lambda u)^{'} = u^{'} C^{'} = \lambda u^{'}$ et $\overline{u}^{'} C^{'} = \overline{\lambda}\, \overline{u}^{'}$, puis en multipliant par *u* à droite, on obtient : $\overline{u}^{'} Cu = \lambda \overline{u}^{'} u = \overline{\lambda} \|u\|^2$ (ii)

   En comparant (i) et (ii), on trouve $\overline{\lambda} = -\lambda$ et les valeurs propres sont des imaginaires purs.

2. On suppose de plus que *A* et *B* sont définies positives, étudier le signe de *Tr(AB)*, où *Tr* désigne la trace de la matrice.

   Il existe une base orthonormée pour la forme hermitienne associée à *A* et orthogonale pour la forme hermitienne associée à *B*. Soit *P* la matrice de passage associée à cette base, alors $A = \overline{P}^{'} P$ et $B = \overline{P}^{'} D P$, où *D* est la matrice diagonale à coefficients strictement positifs $(d_{ij})$. Notons $d = Inf\,(d_{ij})$, on a :

$$Tr(AB) = Tr(\overline{P}^{'} P \overline{P}^{'} D P) = Tr(\overline{P}^{'} P \overline{P}^{'} P D) \geq d\, Tr(A^2)$$

Si $A=(a_{ij})$, comme elle est symétrique, on obtient : $Tr(A^2)=\sum(a_{ij})^2>0$, car sinon on aurait $A$=0, donc $Tr(AB)>0$

3. Soit $M$ une matrice carrée antisymétrique réelle. Montrer que $I+M$ est inversible et déterminer la nature de la matrice $(I-M)(I+M)^{-1}$

   Supposons que $I+M$ ne soit pas inversible, il existe alors un vecteur $u$ non nul tel que $(I+M)u=0$, d'où $Mu=-u$. Par transposition, $u.'M'=-u'$ et $u.'M'u=-\|u\|^2$

   D'autre part, la matrice étant antisymétrique, $M'u=u$ et $u.'M'u=\|u\|^2$, on obtient alors $\|u\|^2=-\|u\|^2$ et $u$ =0, ce qui conduit à une contradiction.

   La matrice $D=(I-M)(I+M)^{-1}$ existe d'après ce qui précède.

   $D$ est orthogonale si et seulement si $D'=D^{-1}$. On obtient :

   $D'=(I-M)^{-1}(I+M)\ et\ D^{-1}=(I+M)(I-M)^{-1}$.

   On a l'égalité si $(I-M)^{-1}M=M(I-M)^{-1}$. Cette relation est obtenue à partir de l'égalité $(I-M)M=M(I-M)$ en la multipliant à gauche et à droite par $(I-M)^{-1}$. On montre de même que $I$-$M$ est inversible. La matrice $D$ est donc orthogonale.

**Exercice n° 4**

On considère les suites $(u_n)$ et $(\lambda_n)$ définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}};\ \lambda_{n+1}=\frac{\lambda_n}{u_{n+1}}$$

1. Montrer que pour $u_1=0$ et $\lambda_1=2$, il existe deux autres suites $(\theta_n)$ et $(\alpha_n)$ telles que pour tout entier $n$ strictement positif, on a :

   $u_n=\cos(\theta_n);\ \lambda_n=\alpha_n\sin(\theta_n);\ 0\le\theta_n\le\pi/2$ . Montrer que la suite $(\lambda_n)$ est convergente, on précisera sa limite.

   Montrons par récurrence sur $n$, la propriété :

   $P(n): u_n$ et $\lambda_n$ existent et valent $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right);\ \lambda_n=2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

   La propriété est vraie pour $n$=1.

Comme $u_n$ est positif, $u_{n+1}$ existe et vaut $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Et $\lambda_{n+1} = \dfrac{\lambda_n}{u_{n+1}} = \dfrac{2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)} = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

On pose alors $\theta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$; $\alpha_n = 2^n$.

$$\underset{n}{Lim}\,\lambda_n = \underset{n}{Lim}\,2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \underset{n}{Lim}\,2^n\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi$$

2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité :

   $|\pi - \lambda_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}$. En déduire un entier *N* tel que : $|\pi - \lambda_N| \leq 10^{-6}$

   Rappelons que : $\left|\sin^{(2p+1)}(x)\right| \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2*p*+1 appliquée à la fonction sinus entre 0 et *x* donne :

   $$\left|\sin(x) - \sum_{k=1}^{p}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

   En particulier pour *p*=0 et $x = \dfrac{\pi}{2^n}$, on en déduit :

   $|\pi - \lambda_n| = 2^n\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) - \dfrac{\pi}{2^n}\right| \leq \dfrac{\pi^3}{6\times 8^n}$ et on peut prendre *N*=8 (en passant au logarithme), car $\dfrac{\pi^3}{6\times 8^N} \leq 10^{-6}$

**Exercice n° 5**

On considère l'espace vectoriel $R^4$ rapporté à une base orthonormée *B*. On désigne par $(x, y, z, t)$ les composantes d'un vecteur dans cette base. Soit $f$ l'endomorphisme de $R^4$, associé, dans la base *B*, à la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'image de *f*.

   Soit $B=(e_1,e_2,e_{3,}e_4)$. On constate que $f(e_2)=f(e_4); f(e_3)=2f(e_1)+f(e_2)$, donc l'image de *f* est engendrée par les deux vecteurs $f(e_2), f(e_1)$ qui forment une base.

2. La matrice *M* est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale semblable.

   $\det(M-\lambda I)=\lambda^2(\lambda^2-4\lambda-11)=0 \Leftrightarrow \lambda=0(\text{double}); 2+\sqrt{15}; 2-\sqrt{15}$.

   La matrice *M* est diagonalisable si et seulement si le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2.

   Résolvons $Mu=0$. On obtient que ce sous espace est engendré par les deux vecteurs indépendants : (-2,0,1,0) et (0,1,0,-1), donc *M* est diagonalisable

   On peut aussi remarquer que la matrice est symétrique donc diagonalisable.

   La matrice diagonale semblable s'écrit : $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\sqrt{15} \end{pmatrix}$

3. Déterminer le rang de la forme quadratique définie sur $R^4$ par :

   $q(x,y,z,t)=4z^2+2xy+2xz+2xt+4yz+4zt$

   Cette forme quadratique est associée à la matrice *M*, donc son rang est égal à 2.

4. On considère le système d'équations :

   $y+z+t=1; x+2z=m^2+1; x+2y+4z+2t=p+2; x+(m-1)y+2z=2$, où *m* et *p* sont des paramètres réels.

   \- Résoudre le système homogène associé

   Soit *A* la matrice su système.

   Si *m*=1, alors *A*=*M* et les solutions du système homogène correspondent au noyau de *f* ou encore au sous espace vectoriel propre associé à la valeur propre 0 : (-2,0,1,0) et (0,1,0,-1), Si $m \neq 1$, $f$ est bijective et l'ensemble des solutions se réduit au vecteur nul.

- Discuter l'existence de solutions de ce système en fonction de *m* et *p*.

Si $m \neq 1$, $f$ est bijective et il existe une solution unique.

Si $m=1$, il existe un sous espace affine de solutions si et seulement si $(1,2,p+2;2) \in \operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f$ est caractérisée par : T=Y et Z=2X+Y, ceci donne : $p+2=2+2$, soit $p=2$.

## Exercice n° 6

Soient $f$ et $g$ deux applications numériques définies sur $]0,+\infty[$, où $f$ est convexe et $g$ affine. On suppose que :

(1) $\forall x > 0,\ f(x) \leq g(x)$ et
(2) $f(1) = g(1)$
Comparer $f$ et $g$.

On suppose que $f \neq g$. Alors $\exists y > 0, y \neq 1, f(y) \neq g(y)$ et même $f(y) < g(y)$.
Comme $g$ est une fonction affine, $g(y) = ay + b$ et comme $f$ est convexe :
$f(\alpha y + (1-\alpha)1) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(1) < \alpha g(y) + (1-\alpha)(a+b), \alpha \in [0,1[$
Et pour $\alpha = 1$, $f(1) = g(1) = a + b < a + b$, d'où la contradiction et les deux fonctions sont égales.