ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

***Dans toute cette épreuve, $R$ désigne l'ensemble des nombres réels.***

## Exercice n° 1

Soit la fonction numérique *f* définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(e^{x}+1)(e^{-x}+1)}$

1. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

2. Étudier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

3. Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction *f*.

## Exercice n° 2

On note $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.

1. L'ensemble des matrices carrées orthogonales d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$ ?
2. L'ensemble des matrices carrées diagonalisables d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$ ?
3. Soit $E = \left\{ A = (a_{ij}) \in M_n(R) \,/\, \forall i, j,\ a_{ij} \geq 0;\ \forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}$. Cet ensemble est-il convexe ?

**Exercice n° 3**

Pour $n$ entier naturel non nul, on dit que la suite de matrices $A_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ w_n & t_n \end{pmatrix}$ converge vers la matrice $A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ si et seulement si $u_n \to u,\ v_n \to v,\ w_n \to w$ et $t_n \to t$.

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$, où $a$ un nombre réel donné strictement positif.

Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim} A_n$ (on pourra mettre en évidence l'expression : $\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}$ )

**Exercice n° 4**

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt$

2. On considère la fonction $f$ définie sur $R$ par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t x^2}}{1+t^3}\,dt$

Étudier l'existence de $f$ et calculer $f(0)$.

3. Étudier les variations de $f$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

**Exercice n° 5**

1. Soient $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels et $P$ un polynôme d'une variable réelle. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de $M$.

3. Trouver un polynôme $P$ du second degré tel que la matrice $P(M)$ admette (-1) pour valeur propre double et 3 pour valeur simple. On explicitera $P(M)$.

4. Déterminer la matrice $M_1$ de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 de la matrice $M$.

5. Déterminer la matrice $M_2$ de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le plan vectoriel propre associé aux valeurs propres 0 et 2 de la matrice *M*.

6. Donner un exemple de matrice *M* telle que $M_1M_2 = M_2M_1 = 0$

**Exercice n° 6**

On considère dans l'espace vectoriel $R^3$ les deux sous-ensembles

$E_1 = \{(n, n^2, n^3) \ / \ n = 0,1,2.....\}$ et $E_2 = \{(n+1, 2n+1, 3n+1) \ / \ n = 0,1,2.....\}$

Soit $V_1$ (respectivement $V_2$) le sous-espace vectoriel de $R^3$ engendré par $E_1$ (respectivement $E_2$)

1. Déterminer la dimension de $V_1$, puis de $V_2$.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel $V_3$ orthogonal à $V_2$ pour la base canonique.

3. La matrice *A* suivante est-elle diagonalisable : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ?

**Exercice n° 7**

1. Pour $\varepsilon \in ]0,1[$ et *n* entier naturel non nul, on pose : $I_n(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1} x^n \, Ln\, x \, dx$, où $Ln$ désigne le logarithme népérien. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_n(\varepsilon)$.

2. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{Ln\, x}{x-1}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\, dx$.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

**ISE Option Mathématiques**

**CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

## Exercice n° 1

Soit la fonction numérique *f* définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$

1. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_1^e = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e} \text{ (en posant } t = e^x\text{)}$$

2. Étudier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

En $+\infty$ : $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \approx \dfrac{1}{e^x}$ qui est convergente car, par exemple, $\underset{+\infty}{Lim}\,(x^2.\dfrac{1}{e^x}) = 0$. On peut aussi calculer directement J = ½.

3. Étudier les variations et tracer le graphe de la fonction *f*.
La fonction est paire (graphe symétrique par rapport à l'axe verticale) et sa dérivée est égale à : $f'(x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{(1+e^x)^2(1+e^{-x})^2}$ qui s'annule pour *x*=0 et est négative. La fonction est décroissante de $[0,+\infty[$ sur $[1/4, 0[$.

## Exercice n° 2

On note $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.

1. L'ensemble des matrices carrées orthogonales d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$ ?

$I_n, -I_n \in M_n(R)$ mais $\frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}(-I_n) = 0 \notin M_n(R)$. L'ensemble n'est donc pas convexe.

2. L'ensemble des matrices carrées diagonalisables d'ordre *n* à coefficients réels est-il un ensemble convexe de $M_n(R)$ ?

Soient $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ deux matrices diagonalisables (deux valeurs propres réelles distinctes). Par contre, $M=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

3. Soit $E=\left\{A=(a_{i\,j})\in M_n(R)/\ \forall i,j\ a_{i\,j}\geq 0;\ \forall i,\ \sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}=1\right\}$. Cet ensemble est-il convexe ?

Montrons que $E$ est convexe.

Soient $A=(a_{i\,j}),\ B=(b_{i\,j})$ et $\lambda\in[0,1]$. On a : $\lambda A+(1-\lambda)B=(\lambda a_{i\,j}+(1-\lambda)b_{i\,j})=(c_{i\,j})$

Comme $a_{i\,j}\geq 0,\ b_{i\,j}\geq 0$, alors $c_{i\,j}\geq 0$,

$\forall i,\ \sum_j c_{i\,j}=\lambda\sum_j a_{i\,j}+(1-\lambda)\sum_j b_{i\,j}=\lambda+(1-\lambda)=1$

**Exercice n° 3**

Pour $n$ entier naturel non nul, on dit que la suite de matrices $A_n=\begin{pmatrix}u_n & v_n\\ w_n & t_n\end{pmatrix}$ converge vers la matrice $A=\begin{pmatrix}u & v\\ w & t\end{pmatrix}$ si et seulement si $u_n\to u, v_n\to v, w_n\to w, t_n\to t$

Soit $A_n=\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n} & 1\end{pmatrix}^n$, où $a$ un nombre réel donné strictement positif.

Déterminer $\underset{n\to\infty}{Lim}A_n$ (on pourra mettre en évidence l'expression : $\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}$ )

$$B_n=\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{n}\\ \frac{a}{n} & 1\end{pmatrix}=\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & \frac{-a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\\ \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\end{pmatrix}$$

On peut remarquer que : $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2+\left(\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}\right)^2=1$, puis poser

$\cos\theta_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ ; $\sin\theta_n=\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ avec $-\pi<\theta_n<\pi$, soit $\theta_n=Arctg\,(\frac{a}{n})$.

D'où $A_n = \left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos n\theta_n & -\sin n\theta_n \\ \sin n\theta_n & \cos n\theta_n \end{pmatrix}$

puis $\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^{\frac{n}{2} Ln\,(1+a^2/n^2)} \approx e^{a^2/2n} \approx 1$.

Par ailleurs $n\,\theta_n = n\,Arctg\,\frac{a}{n} \approx n\frac{a}{n} = a$.

En conclusion $\underset{n\to\infty}{Lim}\, A_n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$.

**Exercice n° 4**

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt$

On a : $1+t^3 = (1+t)(t^2-t+1)$ et $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{1+t} + \frac{-t+2}{t^2-t+1})$.

Par conséquent : $I = \frac{1}{3}Ln(2) + \frac{1}{3}J$ , où $J = \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt$ .

Cette dernière intégrale peut s'écrire :

$$J = \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{-2t+1}{t^2-t+1}\,dt + \int_0^1 \frac{3}{t^2-t+1}\,dt\right) = \frac{1}{2}\Big[-Ln(t^2-t+1)\Big]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$J = 0 + \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\left[Arctg\left((t-\frac{1}{2})\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \sqrt{3}\times\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. En conclusion $I = \frac{1}{3}Ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2. On considère la fonction *f* définie sur *R* par : $f\,(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\,x^2}}{1+t^3}\,dt$

Étudier l'existence de *f* et calculer $f\,(0)$

En $+\infty$, $\underset{n\to\infty}{Lim}\; t^2\,\frac{e^{-tx^2}}{(1+t^3)} = 0$, donc l'intégrale est convergente.

On effectue le changement de variable $t = 1/u$ pour obtenir :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+u^3}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{u+1}{1+u^3}\,du - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^3}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-u+1}\,du - f(0)$$, d'où

$$2f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2-u+1}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[Arctg\left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Soit $f(0) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Étudier les variations de $f$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

La fonction est paire. Pour $0 \le x \le x'$, on a : $e^{-tx^2} \ge e^{-tx'^2}$ pour toutes valeurs de $t$ positives. Par conséquent la fonction $f$ est décroissante sur $R^+$. Comme l'intégrale est convergente, on a : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$

**Exercice n° 5**

1. Soient $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels et $P$ un polynôme d'une variable réelle. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$.

On a : $Ax = \lambda x$, puis $A^k x = \lambda^k x$. Posons $P(X) = \sum_{j=0}^{q} a_j X^j$, on obtient :

$$P(A) = \sum_{j=0}^{q} a_j A^j \text{ et } P(A)(x) = \sum_{j=0}^{q} a_j A^j x = \sum_{j=0}^{q} a_j \lambda^j x = \left(\sum_{j=0}^{q} a_j \lambda^j\right)x = P(\lambda)\,x$$

2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de $M$.

On a $\det(M - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ et

0, 1, 2 sont les valeurs propres.

3. Trouver un polynôme $P$ du second degré tel que la matrice $P(M)$ admette (-1) pour valeur propre double et 3 pour valeur simple. On explicitera $P(M)$.

Posons $P(X) = aX^2 + bX + c$. On peut choisir $P(0) = P(1) = -1$ et $P(2) = 3$.

On obtient : $c = -1; a + b = 0; 4a + 2b = 4.$ On obtient : $P(X) = 2X^2 - 2X - 1$ et

$$P(M)=2M^2-2M-I=\begin{pmatrix}11 & -16 & 48\\ 6 & -9 & 24\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

4. Déterminer la matrice $M_1$ de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 1 de la matrice *M*.

Cherchons d'abord ce sous-espace vectoriel qui doit vérifier : $Mu=u$, à savoir : $y=0;\ x+4z=0$. Le vecteur $u=(4,0,-1)$ engendre la droite vectorielle.

La matrice $M_1$ de la projection orthogonale s'écrit $M_1=B(B'B)^{-1}B'$ où $B=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$.

On obtient : $M_1=\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix}16 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Déterminer la matrice $M_2$ de la projection orthogonale (dans la base canonique) sur le plan vectoriel propre associé aux valeurs propres 0 et 2 de la matrice *M*.

La matrice $M_2$ de la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres 0 et 2 vérifie la propriété demandée.
Le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 0 est engendré par : (-4, 3, 2)
Le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre 2 est engendré par : (2, 1, 0)

La matrice $M_2$ de la projection orthogonale s'écrit $M_2=C(C'C)^{-1}C'$ où $C=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

On obtient : $M_2=\dfrac{1}{120}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{60}\begin{pmatrix}58 & 24 & -10\\ 4 & 37 & 20\\ -5 & 5 & 5\end{pmatrix}$

6. Donner un exemple de matrice *M* telle que $M_1M_2=M_2M_1=0$ ?
Pour toute matrice *M* symétrique ayant 3 valeurs propres réelles distinctes, les droites vectorielles propres associées aux valeurs propres sont orthogonales et la relation est vérifiée.

Par exemple, on pourrait prendre $M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

**Exercice n° 6**

On considère dans l'espace vectoriel $R^3$ les deux sous-ensembles

$$E_1=\{(n,n^2,n^3)\ /\ n=0,1,2.....\}\ \text{et}\ E_2=\{(n+1,2n\ \ +1,3n+1)\ /\ n=0,1,2.....\}$$

Soit $V_1$ (respectivement $V_2$) le sous-espace vectoriel de $R^3$ engendré par $E_1$ (respectivement $E_2$ )

1. Déterminer la dimension de $V_1$, puis de $V_2$.

Les vecteurs (1, 1, 1) ; (2, 4, 8) et (3, 9, 27) sont dans $E_1$, donc dans $V_1$ . Ces trois vecteurs sont indépendants car $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$. Et comme la dimension de $V_1$ est bornée par celle de $R^3$, on a : $\dim V_1 = 3$.

On remarque que : $3n+1 = 2(2n+1)-(n+1)$ et

comme $(n+1, 2n+1, 3n+1) = \text{n}(1,2,3) + (1,1,1)$, $\dim V_2 = 2$

2. Déterminer le sous-espace vectoriel $V_3$ orthogonal à $V_2$ pour la base canonique.

$V_3$ est une droite vectoriel engendrée par un vecteur $u = (x, y, z)$ orthogonal aux vecteurs $(1,2,3)$ et $(1,1,1)$. Plus précisément : $x+y+z=0;\ x+2y+3z=0$, ce qui implique : $x = z;\ y = 2z$ et $u = (1,-2,1)$ est un vecteur directeur.

3. La matrice suivante est-elle diagonalisable $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ?

Il est inutile de calculer les valeurs propres, car cette matrice correspond aux sous-espaces $V_2$ et $V_3$. Par conséquent la matrice admet trois valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable.

## Exercice n° 7

1. Pour $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ et $n$ entier naturel, on pose : $I_n(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 x^n \, Ln\, x\, dx$, où $Ln$ désigne le logarithme népérien. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_n(\varepsilon)$

Par intégration par parties :

$$I_n(\varepsilon) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} Ln\, x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^n}{n+1} dx = -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} Ln\,\varepsilon - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}$$ et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_n(\varepsilon) = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

2. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \frac{Ln\,x}{x-1}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

La fonction $f$ est continue et positive sur $]0,1[$. On a : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{Ln(1+t)}{t} = 1$, on peut donc prolonger la fonction par continuité en 1, en posant $f(1)=1$.

Au voisinage de zéro, la fonction est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (car $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\, f(x) = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0), par conséquent l'intégrale est convergente.

3. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

On a : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$, donc

$$\frac{Ln\,x}{x-1} = -\frac{Ln\,x}{1-x} = -\sum_{k=0}^{n} x^k\,Ln\,x - \frac{x^{n+1}\,Ln\,x}{1-x} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{Ln\,x}{x-1}\,dx = -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k\,Ln\,x\,dx - \int_0^1 \frac{x^{n+1}\,Ln\,x}{1-x}\,dx$$

On a : $\left|\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,Ln\,x}{1-x}\,dx\right| \le \int_0^1 x^n.\left|\frac{x\,Ln\,x}{1-x}\right| dx \le M\int_0^1 x^n\,dx = \frac{M}{n+1}$, car l'application $x \to \frac{x\,Ln\,x}{1-x}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et 1, donc bornée par $M$.

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}\,Ln\,x}{1-x}\,dx = 0$, et la série de terme général $-\int_0^1 x^k\,Ln\,x\,dx$ converge.

D'où $\int_0^1 \frac{Ln\,x}{x-1}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 -x^k\,Ln\,x\,dx$ et d'après la première question

$$\int_0^1 \frac{Ln\,x}{x-1}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 -x^k\,Ln\,x\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$