**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE**
**ET D'ECONOMIE APPLIQUEE**
**ABIDJAN**

**AVRIL 1998**

***CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE***

***OPTION MATHEMATIQUES***

***CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES***

*

* *

## PARTIE n° 1

**Existence du polynôme de meilleure approximation.**

❶ $E$ est trivialement un espace vectoriel normé par la norme sup.

❷- Soit $d$ la distance de $f$ à $F_p$. Par définition, il existe une suite $(g_n)_{n\in IN}$ dans $F_p$ telle que, pour tout $n$ $\|g_n - f\| < d + \frac{1}{n+1}$. Cela implique $\|g_n\| < \|f\| + d + 1$. La boule fermée de $F_p$ $B(0, \|f\| + d + 1)$ est compacte, donc il existe une site extraite de $(g_n)_{n\in IN}$ que l'on continue à appeler $(g_n)_{n\in IN}$ et qui converge vers $g \in F_p$. Par continuité de la norme, on en déduit $\|g - f\| = d$ ; D'où l'existence de $P = g$.

## PARTIE n° 2

**Unicité du polynôme de meilleure approximation.**

❶ Si $d = 0$, alors $P = f$ et $f \in F_p$. Réciproquement, si $f \in F_p$, $d = 0$ et $P = f$ est unique.

❷ Soit $d \neq 0$, $\alpha = \sup\limits_{x\in[a,b]}\left[P(x) - f(x)\right]$ et $\beta = \inf\limits_{x\in[a,b]}\left[P(x) - f(x)\right]$. On doit déjà avoir $\alpha \leq d$ et $\beta \geq -d$. Si $\alpha < d$, soit $Q = P + \dfrac{d-\alpha}{2} \in F_p$. Alors :

$$\sup_{x\in[a,b]}\left[Q(x) - f(x)\right] = \alpha + \frac{d-\alpha}{2} = \frac{d+\alpha}{2} < d \text{ et } \inf_{x\in[a,b]}\left[Q(x) - f(x)\right] \geq -d + \frac{d-\alpha}{2} > -d .$$

C'est absurde, donc $\alpha = d$ ; de même, $\beta = -d$.

Or $P - f$ est continue. Donc, il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $P(x_1) - f(x_1) = \alpha = d$ et $A_1 \neq \varnothing$.

On montre de même que $A_{-1} \neq \varnothing$.

❸ $P - f$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$ qui est compact. Elle y est donc uniformément continue et il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall(x,y) \in [a,b]^2$, si $|x-y| \leq \gamma$ alors :

$$\left|(P-f)(x) - (P-f)(y)\right| \leq \frac{d}{2}$$

Fixons $m$ entier supérieur ou égal à $\dfrac{b-a}{\gamma}$. Le découpage tel que $x_k = a + k\dfrac{b-a}{m}$ répond à la question. On fixe ce découpage dans la suite du problème.

❹ Soit $(x,y) \in A_1 \times A_{-1}$. Alors, $(P-f)(x) - (P-f)(y) = 2d$, donc $x$ et $y$ ne peuvent pas être sur le même segment (saut maximum de $\dfrac{d}{2}$) ni sur des segments contigus (saut maximum de $d$). Mais $A_1 \neq \varnothing$.et $A_{-1} \neq \varnothing$. Donc il y a au moins trois segments différents ($m \geq 3$) et il y a au moins un segment dans $I_\varepsilon$, un segment dans $I_{-\varepsilon}$ (qui sont forcément distincts), d'où $card(I) = r \geq 2$.

❺ Soit $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ suite strictement croissante telle que $B_j = \left[x_{i_j - 1}, x_{i_j}\right] \subset I_1 \cup I_{-1}$. Puisque $I_1 \cap I_{-1} = \varnothing$, cela implique qu'il existe un unique $\varepsilon_1$ tel que $B_{i_1} \in I_{\varepsilon_1}$.

Donc il existe un seul $j_1 \in I$, $j_1 = \sup i_k$ tels que $B_{i_1},\dots,B_{i_r} \in I_{\varepsilon_1}$ ; il existe un seul $j_2 \in I$, $j_2 = \sup i_l$ tels que $B_{i_{k+11}},\dots,B_{i_l} \in I_{-\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_2}$ ; etc.

D'où, de proche en proche, il existe une seule suite $\left(j_1,\dots,j_q\right)$ et $q \geq 2$.

❻ Soit $C_k = \bigcup_{j_{k-1}<j\leq j_k} B_j$. On sait que $B_{j_k}$ et $B_{j_{k+1}}$ ne sont pas contigus (id est : $j_{k+1} > j_k + 1$). Cela implique que si $u \in \left]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_k+1}}\right[$, on a $x < u < y$ pour tout $(x,y) \in C_k \times C_{k+1}$.

A partir de maintenant, $u_k$ est fixé et appartient à $\left]x_{i_{j_k}}, x_{i_{j_k+1}}\right[$.

❼ Soit $Q(x) = (x-u_1)\dots(x-u_{q-1})$. La fonction $P-f$ ne s'annule sur aucun $B_j$ (car $\inf\left|P-f\right| \geq d/2$ sur $B_j$). Il en va trivialement de même pour $Q$. On en déduit que $\left(P-f\right)Q$ est de signe constant sur chacun des $C_k$.

De plus, lorsque l'on passe de $C_k$ à $C_{k+1}$, $P-f$ change de signe (signe de $\varepsilon_k$) ainsi que $Q$ (qui franchit un seul zéro). Le signe de $\left(P-f\right)Q$ est donc constant sur $\bigcup C_k$.

❽ i) Sur $[a,b]/\bigcup C_k$, $\sup\left|P(x)-f(x)\right| = d_1 < d$ ($f$ ne peut atteindre $d$ ou $-d$ en une borne de $C_k$, par définition de $C_k$).

Soit $M = \sup\left|Q(x)\right|$. Alors $\sup\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| \leq d_1 + |\lambda| M$

Finalement, si $|\lambda| < \dfrac{d-d_1}{M}$, alors $\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| < d$

ii) Sur $\bigcup C_k$, $P-f$ et $Q$ ont le même signe. Si on impose $\lambda < 0$, alors :

$$\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| = \left|\left|P(x)-f(x)\right| - |\lambda|\left|Q(x)\right|\right|$$

Or $\left|P(x)-f(x)\right| \geq d/2$ ; En imposant de plus $|\lambda| M < d/2$, on aura :

$$\left|P(x)-f(x)+\lambda Q(x)\right| = \left|P(x)-f(x)\right| - |\lambda|\left|Q(x)\right| < d$$

Récapitulons : en prenant $\lambda < 0$ et $|\lambda| \leq \inf\left(\frac{d-d_1}{2};\frac{d}{2M}\right)$, et puisque $P - f + \lambda Q$ est continue, on aura bien $\|P - f + \lambda Q\| < d$ . Mais alors, $Q \notin F_p$ (car sinon, $P + \lambda Q \in F_p$, ce qui est absurde). Donc le degré de $Q$ est supérieur ou égal à $p+1$, ce qui implique $q \geq p+2$ .

On peut alors choisir $p+2$ valeurs successives de $k$, $k$ variant de 1 à $p+2$, telles que sur chaque $C_k$, il existe $y_k$ tel que $(P-f)(y_k) = \varepsilon_k d$ .

❾ i) Si $P$ et $P_1$ sont dans $F_p$ tels que $\|P - f\| = \|P_1 - f\| = d$, on aura :

$$\left\|\frac{1}{2}(P+P_1) - f\right\| \leq \frac{1}{2}\|P-f\| + \frac{1}{2}\|P_1 - f\| = d$$

Mais $\frac{1}{2}(P+P_1) \in F_p$, on doit donc nécessairement avoir $\left\|\frac{1}{2}(P+P_1) - f\right\| \geq d$ ; Il y a donc égalité.

ii) Soit $x$ tel que $\frac{1}{2}(P(x)+P_1(x)) - f(x) = d$ . Puisque $P(x) - f(x) \leq d$ et $P_1(x) - f(x) \leq d$, on doit en fait avoir : $P(x) - f(x) = P_1(x) - f(x) = d$ . On a le même résultat pour les points $y$ où $\frac{1}{2}(P(y)+P_1(y)) - f(y) = -d$ .

Mais alors, $P - f$ et $P_1 - f$ prennent les mêmes valeurs aux $p+2$ points $y_k$ ; $P - P_1$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p+1$ qui s'annule $p+2$ fois, donc $P = P_1$.

❿ Soit $R \in F_p$ tel qu'il existe $(z_1,\ldots,z_{p+2})$ dans $[a,b]$ où $R(z_i) - f(z_i) = (-1)^i \zeta \|R - f\|$ quel que soit $i \in \{1,\ldots,p+2\}$. Posons $\|R - f\| = \delta$. Il y a deux cas possibles :

- pour $i$ tel que $(-1)^i \zeta = +1$, $R(z_i) - f(z_i) = \delta \geq d$ et $f(z_i) - P(z_i) \geq -d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \geq 0$.

- pour $i$ tel que $(-1)^i \zeta = -1$, $R(z_i) - f(z_i) = -\delta \leq -d$ et $f(z_i) - P(z_i) \leq d$, ce qui implique $R(z_i) - P(z_i) \leq 0$.

Si $R \neq P$, $\delta > d$ et $R(z_i) - f(z_i)$ est strictement positif ou strictement négatif selon la parité de $i$ . Donc $R - P$ admet au moins $p+1$ zéros. C'est impossible, donc $R = P$ .

En fait, la suite $(z_1,\ldots,z_{p+2})$ caractérise $P$ .

**PARTIE n° 3**

**Exemples.**

❶ Soit $P_0$ le polynôme de meilleure approximation de $f$ dans $F_0$. Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors $P_0 = \dfrac{M+m}{2}$ ; En effet :

$\exists x_1 \in [a,b]$, $f(x_1) = M$ , ce qui implique $(P_0 - f)(x_1) = \dfrac{m-M}{2}$

$\exists x_2 \in [a,b]$, $f(x_2) = m$, ce qui implique $(P_0 - f)(x_2) = \dfrac{M-m}{2}$

Et $\|P_0 - f\| = \dfrac{M-m}{2}$.

❷ $f(x) = e^x$. Soit $P_1$ le polynôme de meilleure approximation de $f$ dans $F_1$. Posons $P_1(x) = \alpha x + \beta$. D'après la question II-10, il existe $z_1, z_2, z_3$ tels que $(P-f)(z_1) = (P-f)(z_3)$, donc $(P-f)'$ s'annule une seule fois sur $[a,b]$. On obtient $\alpha - e^x = 0$ (et donc $\alpha > 0$), qui est équivalent à $x = \ln(\alpha) \in [a,b]$. $P-f$ est croissante de $a$ à $\ln(\alpha)$ et décroissante de $\ln(\alpha)$ à $b$. Donc $\|P-f\| = -(P-f)(a) = -(P-f)(b) = (P-f)(\ln(\alpha))$ ou, de façon équivalente :

$$e^a - \alpha a - \beta = e^b - \alpha b - \beta = \alpha \ln(\alpha) + \beta - \alpha$$

ce qui donne :

$$\alpha = \frac{e^b - e^a}{b-a} ; \beta = \frac{1}{2(b-a)}\left[be^a - ae^b + (e^b - e^a)\left(1 - \ln\left(\frac{e^b - e^a}{b-a}\right)\right)\right]$$

❸ $a = -b$, $f(x) = x^2 - \varepsilon x$ avec $\varepsilon = \mathrm{sgn}(x)$ : c'est une fonction paire. Le polynôme de meilleure approximation $P$ doit donc être pair aussi, car $Q(x) = P(-x)$ est aussi un polynôme de meilleure approximation, et d'après la question II-10, ce polynôme est unique.

Posons $P(x)=\alpha x^2+\beta$. Toujours d'après la question II-10, il existe $z_1, z_2, z_3, z_4$ où $P-f$ vaut $\pm d$. Par parité, il existe $z_5$ tel que $(P-f)(z_5)=\pm d$ et $z_3=0$. Soit $g=P-f$, étudiée sur $[0,b]$. Puisque $g(0)=g(z_5)$, $g'(x)=2(\alpha-1)x+1$ s'annule en $z_4=\frac{-1}{2(\alpha-1)}$. Cela implique $\alpha-1<0$, et donc $g$ est croissante de $0$ à $\frac{-1}{2(\alpha-1)}$ et décroissante de $\frac{-1}{2(\alpha-1)}$ à $b=z_5$. Finalement, $g(0)=-g\left(\frac{-1}{2(\alpha-1)}\right)=g(b)$, ce qui implique $\beta=(\alpha-1)b^2+b+\beta$ et donc $\alpha-1=-1/b$, donc $\frac{-1}{2(\alpha-1)}=\frac{b}{2}$ et $g\left(\frac{b}{2}\right)=-g(0)$ est équivalent à $\alpha\frac{b^2}{4}+\beta=-\beta$.

Finalement : $P(x)=(1-1/b)x^2-b/8$