

# CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

## OPTION MATHEMATIQUES

### CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

\*



\* \*

Dans tout ce qui suit,  $J$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  inclus dans  $[-1, 1]$ , de longueur non nulle et tel que, pour tout  $x \in J, x^2 \in J$ . On étudie l'ensemble  $E_J$  des applications dérivables de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$(*) \forall x \in J, f'(x) = f(x^2).$$

Remarque : Il s'agit d'une équation différentielle «non ordinaire». En effet, les équations différentielles ordinaires sous forme «résolue» sont de la forme

$$f'(x) = F(x, f(x))$$

ce qui n'est pas le cas ici. Nous n'avons donc à priori aucun résultat d'existence et d'unicité ; le théorème de Cauchy ne s'applique pas ici. Par contre l'application  $f \mapsto \{x \mapsto f'(x) - f(x^2)\}$  est visiblement linéaire. On a donc une équation différentielle linéaire non ordinaire !

#### I - PRELIMINAIRES

❶ Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , et  $g$  une application  $n$  fois dérivable de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout entier  $k, 0 \leq k \leq n$ , la dérivée  $k$ -ième  $g^{(k)}$  admet une limite  $\lambda_k$  quand la variable tend vers  $a$ . On définit alors la fonction  $\tilde{g}$  de  $[a, b[$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} \tilde{g}(a) &= \lambda_0; \\ \forall x \in ]a, b[, \quad \tilde{g}(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Solution : Appelons  $P_n$  la propriété précédente, et démontrons la par récurrence.  $P_0$  n'est autre que le prolongement par continuité et donc est vraie. Supposons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$ , vraie et démontrons  $P_{n+1}$ . Notons  $h = \tilde{g}^n$ . Par l'hypothèse  $P_n$ ,  $h$  est une fonction continue sur  $[a, b[$ , et dérivable sur  $]a, b[$ . Pour tout  $x \in ]a, b[$  on a, par le théorème des accroissements finis,

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(a + \theta x) = \tilde{g}^{(n+1)}(a + \theta x)$$

où  $\theta \in ]0, 1[$ . Et donc, comme  $\lim_{x \rightarrow a} (a + \theta x) = a$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{g}^{(n)}(x) - \tilde{g}^{(n)}(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \tilde{g}^{(n+1)}(a + \theta x) = \lambda_{n+1}$$

ce qui achève la démonstration par récurrence.

② Soit  $J$  un intervalle comme au début. Démontrer que  $E_J$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions indéfiniment dérivable sur  $J$ .

Solution : Classique et très simple par récurrence pour la dérivabilité infinie.

③ Soit  $g$  une fonction dérivable définie sur un intervalle borné  $I = ]a, b[$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

① On suppose que  $g$  et sa dérivée  $g'$  sont toutes deux minorées sur  $I$ . Montrer que la fonction  $g(x)$  admet une limite dans  $\mathbb{R}$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

Solution : Si  $m$  est un minorant de  $g'$ .

On considère la fonction  $h$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall x \in I, h(x) = g(x) - mx$ .

La fonction  $h$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée  $h'$  est positive :  $\forall x \in I, h'(x) = g'(x) - m \geq 0$  par la définition de  $m$ .  $h$  est donc une fonction croissante. Comme elle est minorée, elle admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$ . Il en est de même de  $g$ , puisque  $a$  est un nombre réel et que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = ma + \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

② On suppose maintenant que  $g$  et sa dérivée  $g'$  sont toutes deux majorées sur  $I$ . Démontrer que la fonction  $g(x)$  admet une limite dans  $\mathbb{R}$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

Solution : On pose pour  $x \in I, \tau(x) = -g(x)$  et on se ramène au cas précédent.

④ On définit une application  $\theta$  de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} \theta(-1) &= \theta(1) = 0 \\ \forall x \in ]-1, 1[, \theta(x) &= e^{\omega(x)} \text{ avec } \omega(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

① Démontrer que  $\theta$  est une fonction indéfiniment dérivable sur  $] -1, 1[$ .

Solution :  $\theta$  est indéfiniment dérivable comme composée de fonctions indéfiniment dérivable

② Démontrer que  $\theta$  est une fonction indéfiniment dérivable sur  $[-1, 1]$ , strictement croissante sur  $[-1, 0]$  et strictement décroissante sur  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta^{(n)}(1) = \theta^{(n)}(-1) = 0$

Solution : Montrons qu'il existe une fraction rationnelle  $R_n(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2 - 1)^N}$ , où  $P_n$  est un polynôme et  $N$  un entier positif, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[, \theta^{(n)}(x) = R_n(x)e^{\omega(x)}$$

l'égalité à démontrer est vraie pour  $n = 0$  en prenant  $P_0 \equiv 1$  et  $N = 0$ . Si, pour  $n \in \mathbb{N}$ , elle est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , alors

$$\forall x \in ]-1, 1[, (\theta^{(n)}(x))' = (R_n(x)e^{\omega(x)})' = (R_n'(x)\omega'(x))e^{\omega(x)}$$

avec

$$R_n'(x) + R_n(x)\omega'(x) = \frac{P_n'(x)(x^2 - 1)^2 + (2x - 2Nx(x^2 - 1))P_n(x)}{(x^2 - 1)^{N+2}} = \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2 - 1)^{N+2}}$$

d'où le résultat par récurrence.

$$\theta'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \text{ est positive pour } x \in ]-1, 0] \text{ et négative pour } x \in [0, 1[.$$

$$\text{En posant } y = \frac{1}{(x^2 - 1)^N}, \text{ on obtient que } \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{e^{\omega(x)}}{(x^2 - 1)^N} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y y^N = 0$$

par les propriétés classiques de l'exponentielle, d'où le résultat en utilisant I-①.

③ Soit  $C^\infty$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions indéfiniment dérivable de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et  $D$  le sous espace de  $C^\infty$  des fonctions s'annulant ainsi que toutes leur dérivées aux points 1 et -1. Démontrer que l'application linéaire de  $C^\infty$  dans lui même  $f \mapsto \theta f$  (où  $\theta f$  est l'application définie par  $\forall x \in [-1, 1], \theta f(x) = \theta(x)f(x)$ ) est injective et à valeurs dans  $D$ . En déduire que  $D$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension infinie.

Solution : Notons  $\Theta$  l'application linéaire de  $C^\infty$  dans lui-même  $f \mapsto \theta f$ . Le noyau de  $\Theta$  est l'ensemble des fonctions  $f \in C^\infty$  telles que  $\forall x \in [-1, +1], \theta(x) f(x) = 0$ . Comme,  $\forall x \in ]-1, +1[, \theta(x) > 0$  on a que  $\forall x \in ]-1, +1[, f(x) = 0$ . Comme  $f$  est continue,  $f$  est la fonction nulle. Par le théorème de Liebniz,  $\Theta(f)^{(n)}(\pm 1) = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \theta^{(p)}(\pm 1) f^{(n-p)}(\pm 1) = 0$  et donc  $\forall f \in C^\infty, \Theta(f) \in D$ . Comme  $C^\infty$  contient les fonctions polynômiales, c'est un espace de dimension infinie. Comme l'image d'une base de cardinal infini par une application linéaire injective est un système libre de cardinal infini, on en déduit que  $D$  est de dimension infinie.

## II - ETUDE DE $E_{[-1,1]}$

① On définit une suite d'entiers  $(q_k, k \in \mathbb{N})$  par

$$q_0 = 0;$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, q_{k+1} = 2q_k + 1$$

① Démontrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, q_k = 2^k - 1$

Solution : Par récurrence évidemment !

On note  $Q = \{ q_k / k \in \mathbb{N} \}$ .

Soit  $(a_n, n \in \mathbb{N})$  la suite de nombres réels définie par

$$a_0 = 1 ;$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{q_k} = \frac{1}{\prod_{l=1}^{l=k} q_l}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \notin Q, a_n = 0$$

② Trouver la nature des séries  $\sum a_n$  et  $\sum na_n$

Solution :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{q_{k+1}}}{a_{q_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k+1} - 1} = 0$  et donc d'après le tes de d'Alembert, la série  $\sum a_{q_k}$  est convergente d'où  $\sum a_n$  est convergente. Par ailleurs, comme, pour  $k \geq 1, q_k a_{q_k} = a_{q_{k-1}}$ , la série  $\sum na_n$  est également convergente.

③ Déterminer, pour  $x > 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{q_k} x^{q_k}$ .

Solution : On a

$$\frac{a_{q_{k+1}} x^{q_{k+1}}}{a_{q_k} x^{q_k}} = \frac{1}{2^{k+1} - 1} x^{2^{k+1}} - 2^k \geq \frac{1}{2} \frac{x^{2^k}}{2^k}$$

Or, pour  $x > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = \infty$  et donc la suite  $(a_{q_k} x^{q_k}, k \in \mathbb{N})$  est strictement croissante à partir d'un certain rang et tend vers  $+\infty$ .

④ Démontrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est 1 et que l'application

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est définie sur  $[-1, +1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Solution : Par le ② ci-dessus, le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n x^n$  est supérieur ou égal à 1. Par le ③ ci-dessus  $R \leq 1$ . On a donc  $R = 1$ . Comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup \{|a_n x^n| / x \in [-1, +1]\} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ , la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est normalement convergente sur  $[-1, +1]$  et donc la fonction de  $[-1, +1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est définie et continue.

⑤ Démontrer que  $S$  est un élément de  $E_{[-1,1]}$  tel que  $S(0) = 1$ .

Solution : Comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup \{|na_n x^{n-1}| / x \in [-1, +1]\} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} na_n < +\infty$  la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$  est normalement convergente sur  $[-1, +1]$  et donc  $S$  est dérivable sur  $[-1, +1]$  et,  $\forall x \in [-1, +1]$ ,  $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ . Enfin

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k a_{q_k} x^{q_{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{q_{k-1}} x^{2^{q_{k-1}}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{q_k} (x^2)^{q_k} = S(x^2)$$

et donc  $S \in E_{[-1,1]}$ .  $S(0) = a_0 = 1$  par construction de la suite  $(a_n, n \in \mathbb{N})$ .

② ① Donner une majoration que l'on justifiera de  $\left| S(x) - \sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n \right|$  qui soit valable sur tout le segment  $[0,1]$ . En déduire une valeur décimale approchée à  $10^{-3}$  près par défaut de  $S(1)$ .

Solution : On a :

$$q_0 = 0, a_{q_0} = 1, q_1 = 1, a_{q_1} = 1, q_2 = 3, a_{q_2} = \frac{1}{3}, q_3 = 7, a_{q_3} = \frac{1}{21}, q_4 = 15, a_{q_4} = \frac{1}{315}, q_5 = 31, a_{q_5} = \frac{1}{9765}$$

Donc si on pose  $T(x) = \sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=4} a_{q_k} x^{q_k}$ , on a  $T(1) = 2.384$  à  $10^{-3}$  près. Par ailleurs, et avec des majorations qui ne font pas dans la dentelle,

$$\left| S(x) - \sum_{n=0}^{n=15} a_n x^n \right| \leq a_{q_5} + \sum_{l=6}^{\infty} \frac{1}{2^l - 1} \leq a_{q_5} + \sum_{l=5}^{\infty} \frac{1}{2^l} \leq 2a_{q_5} \leq 10^{-3}$$

et donc  $S(1)$  est approchée par défaut par  $T(1) = 2.384$  à  $10^{-3}$

② Représenter dans un repère orthonormé l'allure de la courbe  $y = S(x)$  ; on précisera la concavité.

Solution : Sur  $[0,1]$  toutes les dérivées de  $S$  sont positives et en particulier la fonction  $y$  est croissante et convexe. La fonction de  $[-1, +1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto S(x) - S(0) = S(x) - 1$  est impaire et le graphe de  $s$  est symétrique par rapport au point  $(0,1)$ . Sur l'intervalle  $[-1, 0]$  la fonction  $S$  est donc croissante et concave.

③ Etablir la formule :  $\int_0^1 S(x) dx = \frac{2}{3} S(1)$ .

Solution : Par une intégration par partie et un changement de variable  $u = x^2$ , on obtient

$$\int_0^1 S(x) dx = [xS(x)]_0^1 - \int_0^1 xS'(x) dx = S(1) - \int_0^1 xS(x^2) dx = S(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 S(u) du$$

d'où le résultat.

③ Soient  $(a, b) \in [-1, 1]^2$  tels que  $a \leq 0 \leq b, a^2 \leq b, J = [a, b]$  et  $f \in E_j$ .

① On suppose que  $f(0) = 0$ . On pose  $M = \sup\{|f(t)| / t \in J\}$ . Montrer que



$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, |f(x)| \leq M|x|^{q_n}.$$

Comme  $q_0 = 0$ , l'inégalité est vraie pour  $n = 0$  par définition de  $M$ . Supposons qu'elle soit vraie jusqu'à  $n \in \mathbb{N}$ . Par le théorème des accroissements finis on a

$$\forall x \in J, \exists \theta \in [0, 1], f(x) = f(x) - f(0) = (x - 0)f'(\theta x) = xf'(\theta x)$$

et donc

$$|f(x)| \leq |x|M|x|^{q_n} = M|x|^{q_{n+1}} = M|x|^{q_{n+1}}$$

ce qui démontre le résultat par récurrence.

② En déduire que  $f$  est nulle.

Solution : On a, pour tout  $x \in ]a, b[, |x| < 1$  et donc  $|f(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M|x|^{q_n} = 0$ . La fonction  $f$  est donc nulle sur  $]a, b[$  et, par continuité, elle est nulle sur  $[a, b]$ .

③ On ne suppose plus maintenant que  $f(0) = 0$ . Démontrer que, pour tout  $x \in J$ ,  $f(x) = f(0)S(x)$ . En déduire que  $E_j$  est de dimension 1.

Solution : Soit pour  $x \in [a, b], g(x) = f(x) - f(0)S(x)$ .  $g$  est un élément de  $E_{[a, b]}$  comme combinaison linéaire d'éléments de  $E_{[a, b]}$ . Comme  $g(0) = f(0) - f(0)S(0) = f(0) - f(0) = 0$ ,  $g$  est nulle par la ①. Donc tout élément de  $E_{[a, b]}$  est proportionnel à la restriction de  $S$  à  $[a, b]$ .  $E_{[a, b]}$  est donc un espace vectoriel de dimension 1.

Dans cette partie, le symbole  $J$  désigne l'intervalle  $]0,1[$

① Soient  $f \in E_J, p \in J$  et  $(p_n, n \in \mathbb{N})$  la suite définie par

$$p_0 = p \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \sqrt{p_n}.$$

① Démontrer que la suite  $(p_n, n \in \mathbb{N})$  est strictement croissante et déterminer sa limite.

Solution : On a que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = p^{\frac{1}{2^n}}$  d'où la croissance et déterminer sa limite.

② Démontrer que la suite  $\left( \prod_{k=0}^{k=n} (1 + p_{k+1} - p_k), n \in \mathbb{N} \right)$  est convergente.

Solution : Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(1 + p_{k+1} - p_k) \geq 1$ , donc  $\ln(1 + p_{k+1} - p_k) \geq 0$  et donc, la suite  $\left( \ln \left( \prod_{k=0}^{k=n} (1 + p_{k+1} - p_k) \right), n \in \mathbb{N} \right)$  est croissante. Comme pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\ln(1 + p_{k+1} - p_k) \leq p_{k+1} - p_k$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ln \left( \prod_{k=0}^{k=n} (1 + p_{k+1} - p_k) \right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(1 + p_{k+1} - p_k) \leq \sum_{k=0}^{k=n} (p_{k+1} - p_k) = p_{n+1} - p_0 \leq 1$ . La suite  $\left( \prod_{k=0}^{k=n} (1 + p_{k+1} - p_k), n \in \mathbb{N} \right)$  est donc convergente puisque croissante et majorée par  $e$ .

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \sup \{ |f(x)| / x \in [p_n, p_{n+1}] \}$$

③ A l'aide de la relation  $f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^x f'(t)dt$ , démontrer l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq M_{n-1} (1 + p_{n+1} - p_n)$$



En déduire que la suite  $(M_n, n \in \mathbb{N})$  est bornée.

Solution : On a  $f(x) = f(p_n) + \int_{p_n}^x f'(t)dt = f(p_n) + \int_{p_n}^x f(t^2)dt$ , et donc, comme  $|f(p_n)| \leq M_{n-1}$ , pour  $x \in [p_n, p_{n+1}]$ ,

$$|f(x)| \leq M_{n-1} + \int_{p_n}^{p_{n+1}} \sup\{|f(t^2)| / t \in [p_n, p_{n+1}]\} dt \leq M_{n-1} + (p_{n+1} - p_n) \sup\{|f(t)| / t \in [p_{n-1}, p_n]\} = M_{n-1}(p_{n+1} - p_n)$$

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M_n \leq M_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + p_{k+1} - p_k) \leq M_0 \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + p_{k+1} - p_k)$$

et donc la suite  $(M_n, n \in \mathbb{N})$  est bornée.

④ Etablir que, pour tout  $\alpha \in J$ ,  $f$  et  $f'$  sont bornées sur  $[\alpha, 1[$ . Montrer que  $f(x)$  a une limite  $\lambda$  quand  $x$  tend vers 1 et que, si l'on pose  $f(1) = \lambda$ , la fonction ainsi prolongée appartient à  $E_{]0,1]}$

Solution : Soit  $p \in ]0, \alpha]$ . On a alors  $[\alpha, 1[ \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} [p_n, p_{n+1}]$  et  $\sup\{|f(t)| / t \in [\alpha, 1[ \} \leq \sup\{\sup\{|f(t)| / t \in [p_n, p_{n+1}]\}, n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{M_n / n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ .  $f$  est donc bornée sur  $[\alpha, 1[$  et donc  $f'$  est aussi bornée puisque, d'après  $f'(x) = f(x^2)$   $\sup\{|f'(x)| / x \in [\alpha, 1[ \} = \sup\{|f(x^2)| / x \in [\alpha, 1[ \} = \sup\{|f(x)| / x \in [\alpha^2, 1[ \} < +\infty$ . L'application  $g$  de  $]-1, -\alpha]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall x \in ]-1, -\alpha], g(x) = f(-x)$  vérifie donc les hypothèses du I ④ et admet donc une limite quand  $x$  tend vers -1. La fonction  $f$  admet donc une limite notée  $\lambda$  quand  $x$  tend vers 1. Soit  $f$  la fonction de  $[\alpha, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(1) = \lambda$  et  $f(x) = f(x)$  pour tout  $x \in [\alpha, 1[$ .  $f$  est bien sur dérivable sur  $[\alpha, 1[$  et  $f'(x) = f(x^2)$  pour tout  $x \in [\alpha, 1[$ .  $f'$  admet donc  $\lambda$  comme limite quand  $x$  tend vers 1. D'après I ①  $f$  est dans  $E_{[\alpha, 1]}$ .

② Soit  $f \in E_j$

① On suppose qu'il existe  $\beta \in J$  tel que  $f$  soit majorée dans  $]0, \beta]$ .  
Etablir que  $f(x)$  et  $f'(x)$  ont une même limite finie  $\mu$  quand  $x$  tend vers 0. En déduire que  $f$  est la restriction de  $\mu S$  à  $J$ .

Solution : Si  $f$  est majorée sur  $]0, \beta]$ , il en va de même de  $f'$  puisque  $\sup\{f'(x) / x \in ]0, \beta]\} = \sup\{f(x^2) / x \in ]0, \beta]\} = \sup\{f(x) / x \in ]0, \beta^2]\} \leq \sup\{f(x) / x \in ]0, \beta]\} < +\infty$ . Que  $f(x)$  admette une limite  $\mu$  quand  $x$  tend vers 0 est alors une conséquence de I ③. Par  $f'(x) = f(x^2)$ ,  $f'(x)$  admet la même limite  $\mu$  quand  $x$  tend vers 0 et l'application prolongée en 0 est donc un élément de  $E_{[0,1]}$ . D'après II ③ ③  $f$  est la restriction de la fonction  $\mu S$  à  $J$ .

② En déduire que si  $f$  n'est pas la restriction à  $J$  du produit de  $S$  par une constante, on a alors les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon \in J, \sup\{f(x) / x \in ]0, \varepsilon]\} = +\infty \text{ et } \inf\{f(x) / x \in ]0, \varepsilon]\} = -\infty$$

Solution : Si  $f$  est minorée sur  $]0, \beta]$ , la conclusion de la question précédente reste la même, en invoquant toujours I ③. Donc si  $f$  n'est pas la restriction à  $]0, 1]$  du multiple de  $S$  par une constante,  $f$  n'est ni majorée ni minorée sur aucun intervalle  $]0, \beta], \beta \in J$ . Ceux sont exactement les propriétés demandées.

③ En déduire que si  $f$  n'est pas la restriction à  $J$  du produit de  $S$  par une constante

$$\text{Card}\{x / x \in ]0, \varepsilon], f(x) = 0\} = +\infty$$

Solution : Si la fonction  $f$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur un intervalle  $]0, \varepsilon]$  avec  $0 < \varepsilon \leq 1$ , alors  $f$  ne s'annule pas sur un intervalle  $]0, \varepsilon']$  avec  $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ ,  $f$  reste de signe constant sur  $]0, \varepsilon']$  et donc est majorée ou minorée, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. D'où le résultat.

La suite de cette partie est consacrée à la fabrication et à l'étude d'un élément de  $E_j$  qui ne soit pas la restriction à  $J$  du produit de  $S$  par une constante.

③ On Pose  $r_0 = \frac{1}{4}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $r_{n+1} = \sqrt{r_n}$ .



① Démontrer que la suite  $(r_n, n \in \mathbb{Z})$  est bien définie et expliciter  $r_n$ .

Solution : On a, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $r_n = (1/4^{2^{-n}})$ . En effet, la formule est vraie pour  $n = 0$ .

Si elle est vraie pour  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $r_{n+1} = (1/4^{2^{-n}})^{\frac{1}{2}} = (1/4^{2^{-n+1}})$  et donc elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si elle est vraie pour  $-n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $r_{-n-1} = (1/4^{2^n})^2 = (1/4^{2^{n+1}})$  et donc la formule est vraie pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

② Soit, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $I_n = [r_n, r_{n+1}]$ . Déterminer  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ .

Solution : La suite  $(r_n, n \in \mathbb{Z})$  est strictement croissante,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow -\infty} r_n = 0$  et donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n = ]0, 1[$ .

Soit  $\lambda$  un élément de  $D$  où  $D$  est défini en ④.

③ Démontrer que les formules suivantes

$$\forall x \in I_0, \varphi_0(x) = \lambda(8x - 3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I_n, \varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(r_n) + \int_{r_n}^x \varphi_{n-1}(t^2) dt$$

définissent pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une application  $\varphi_n$  de  $I_n$  dans  $\mathbb{R}$ .

Solution : Si  $x \in [r_0, r_1]$ , alors  $8x - 3 \in [-1, 1]$  et donc  $\varphi_0$  est bien définie. Supposons par récurrence que, jusqu'à l'entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_k$  soit définie sur  $[r_k, r_{k+1}]$ . Pour  $t \in [r_{n+1}, r_{n+2}]$ ,  $t^2 \in [r_n, r_{n+1}]$  et donc pour  $x \in [r_{n+1}, r_{n+2}]$ ,  $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(r_{n+1}) + \int_{r_{n+1}}^x \varphi_n(t^2) dt$  est bien définie.

④ Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n$  admet dans  $I_n$  une dérivée continue et que  $\varphi_n'(r_{n+1}) = \varphi_{n-1}(r_n) = \varphi_n(r_n)$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la dérivée à gauche de  $\varphi_{n-1}$  en  $r_n$  et la dérivée à droite de  $\varphi_n$  en ce même point sont égales.

Solution : La fonction  $\varphi_n$  est sur  $I_n$  une primitive de la fonction  $t \mapsto \varphi_{n-1}(t^2)$ . Elle est donc continuellement dérivable dans cet intervalle et les dérivées aux bornes de l'intervalle vérifient

$$\begin{aligned}\varphi'_n(r_n) &= \varphi_{n-1}(r_n^2) = \varphi_{n-1}(r_{n-1}) = \varphi_{n-2}(r_{n-1}) \\ \varphi'_n(r_{n+1}) &= \varphi_{n-1}(r_{n+1}^2) = \varphi_{n-1}(r_n) = \varphi_n(r_n)\end{aligned}$$

et donc

$$\varphi'_{n-1}(r_n) = \varphi_{n-1}(r_{n-1}) = \varphi'_n(r_n)$$

ce qui est demandé

**④** ① Démontrer que la formule suivante

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in I_{-m}, \varphi_{-m}(x) = \varphi'_{-m+1}(\sqrt{x})$$

définit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , une application  $\varphi_{-n}$  de  $I_{-n}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Solution : Cela se fait par récurrence. Pour  $x \in I_{-1} = [r_{-1}, r_0]$ ,  $\sqrt{x} \in [\sqrt{r_{-1}}, \sqrt{r_0}] = [r_0, r_1] = I_0$ , et donc  $\varphi_{-1}(x) = \varphi'_0(\sqrt{x})$  est bien défini. Supposons donc qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi_{-k}$  soit défini sur  $I_{-k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , alors pour  $x \in I_{-n-1} = [r_{-n-1}, r_{-n}] = [r_{-n}^2, r_{-n-1}^2]$ ,  $\sqrt{x} \in I_{-n} = [r_{-n}, r_{-n+1}]$  et donc la formule  $\varphi_{-n-1}(x) = \varphi'_{-n}(\sqrt{x})$  définit bien  $\varphi_{-n-1}$  sur  $I_{-n-1}$ .

② Etablir que, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi_{-m}$  est indéfiniment dérivable dans  $I_{-m}$  et que  $\varphi_{-m}$  et toutes ses dérivées s'annulent aux deux bornes de  $I_{-m}$ .

Solution : A nouveau par récurrence  $\varphi_0$  est la composée de deux fonctions de classe  $C^\infty$  et donc de classe  $C^\infty$ . La fonction  $\lambda$  et toutes ses dérivées s'annulent en  $\pm 1$ , donc la fonction  $\varphi_0$  et toutes ses dérivées s'annulent en  $r_0$  et  $r_1$ . Supposons donc qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi_{-k}$  soit de classe  $C^\infty$  sur  $I_{-k}$  et s'annule ainsi que toutes ses dérivées en  $r_{-k}$  et  $r_{-k+1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .  $\varphi_{n-1}$  est alors la composée de deux fonctions de classe  $C^\infty$  et donc est de classe  $C^\infty$ . Comme  $\varphi'_{-n}$  s'annule ainsi que toutes ses dérivées en  $r_{-n-1}$  et  $r_{-n}$ .

⑤ Démontrer qu'il existe une application  $\psi_k$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in I_n, \psi_k(x) = \varphi_n(x)$$



et montrer que cette fonction  $\psi_k$  appartient à  $E_j$  mais que, pour un choix convenable de  $\lambda$ ,  $\psi_k$  n'est pas la restriction à  $J$  de produit de  $S$  par une constante.

Solution : la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in ]r_n, r_{n+1}[ , \psi_k(x) = \varphi_n(x),$$

définie  $\psi_k$  sur  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ]r_n, r_{n+1}[$  et cette fonction  $\psi_k$  est bien sur continuellement dérivable sur  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ]r_n, r_{n+1}[$ . Il reste à vérifier que  $\psi_k$  est bien définie aux points  $\{r_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi_n(r_{n+1}) = \varphi_{n+1}(r_{n+1})$ . La formule de l'énoncé définit donc bien  $\psi_k$  et la fonction est continue sur  $J$ . Comme pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi'_n(r_{n+1}) = \varphi'_{n+1}(r_{n+1})$ , la fonction est aussi dérivable sur  $J$ . Par construction, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $x \in I_n$ ,  $\varphi'_n(x) = \varphi'_{n-1}(x^2)$  et donc pour tout  $x \in J$ ,  $\psi'_k(x) = \psi'_k(x^2)$ . La fonction  $\psi_k$  est donc un élément de  $E_j$ . Cette fonction s'annule une infinité de fois au voisinage de 0. Si elle se prolonge en 0, sa limite en 0 est donc nulle et elle est la restriction à  $J$  de la fonction  $\lim_{x \rightarrow 0} \psi_k(x)S \equiv 0$  et  $\lambda$  est la fonction nulle. Il suffit donc de choisir  $\lambda \in D, \lambda \equiv 0$ .

⑥ Démontrer que l'application de  $D$  dans  $E_j, \lambda \mapsto \psi_\lambda$  est linéaire et injective. En déduire que  $E_j$  est un espace vectoriel de dimension infinie sur  $\mathbb{R}$ .

Solution : l'application de  $D$  dans  $E_j, \lambda \mapsto \psi_\lambda$  est linéaire par construction, et si  $\psi_k$  est la fonction nulle, alors  $\lambda$  est la fonction nulle par construction. Par un raisonnement identique au I ④,  $E_j$  est alors de dimension infinie.

⑦ On pose ici  $\lambda = \theta$  où  $\theta$  est défini au I ④.

① Donner le sens de variation de  $\psi_\theta$  et celui de  $\psi'_\theta$  sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . Étudier

le signe et le sens de variation de  $\psi_\theta$  sur  $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$ .

Solution : Par construction,  $\psi_\theta$  est positive ou nulle sur l'intervalle  $I_0$  et donc, strictement croissante et positive sur tous les intervalles  $I_n, n \in \mathbb{N}^*$ . Donc  $\psi_\theta$  est positive et croissante sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  et sa dérivée  $y$  est positive. Sur  $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$ ,  $\psi_y(x) = \theta'(8\sqrt{x} - 3)$  est négative pour  $x \in \left[\frac{1}{16}, \frac{9}{64}\right]$  et positive pour  $x \in \left[\frac{9}{64}, \frac{1}{4}\right]$ . De plus  $\psi'_\theta(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} \theta''(8\sqrt{x} - 3)$  s'annule en un seul point  $x_1$  de  $\left[\frac{1}{16}, \frac{9}{64}\right]$  et en un seul point  $x_2$  de  $\left[\frac{9}{64}, \frac{1}{4}\right]$ ,  $\psi_\theta$  est donc croissante sur  $\left[\frac{1}{16}, x_1\right]$ , décroissante sur  $[x_1, x_2]$  et croissante sur  $\left[x_2, \frac{1}{4}\right]$ .

② Donner sommairement l'allure de la représentation graphique de  $\psi_\theta$  sur  $\left[\frac{1}{16}, 1\right]$ .

③ Donner une minoration de nombre de 0 de  $\psi_\theta$  dans  $]r_n, r_{n+1}[$  pour  $n < 0$ .

Solution : Sur  $I_{-1}$ ,  $\psi_\theta$  admet un 0. On va démontrer par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , sur  $I_{-n}$ ,  $\psi_\theta$  admet au moins  $n$  0. La propriété est vrai pour  $n = 1$ . Supposons la vraie pour  $n + 10$ . Par le théorème des accroissements, finis sur  $I_{-n}$ ,  $\psi'_0$  admet au moins  $n + 10$ . Donc sur  $I_{-n-1}$ ,  $\psi_\theta$  admet au moins  $n + 10$ .

⑧ Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x) dx = (-2)^n \int_0^1 \psi_\theta(x) dx$$

En déduire la nature de  $\int_0^1 \psi_\theta(x) dx$ .

Solution : Comme  $\psi_\theta(x)$  admet une limite quand  $x$  tend vers 1, le seul problème pour la convergence de  $\int_0^1 \psi_\theta(x) dx$  est en 0. Si cette intégrale convergeait, on aurait

$$\int_0^1 \psi_\theta(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{r_{-n-1}}^{r_{-n}} \psi_\theta(x) dx$$

cette dernière série étant convergente. Or pour  $n \in \mathbb{N}$ , en faisant une intégration par partie, puis en faisant le changement de variable  $u = x^2$

$$\begin{aligned} \int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x) dx &= [x \psi_\theta]_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} - \int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} x \psi'_\theta(x) dx \\ &= 0 - \int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} x \psi_\theta(x^2) dx = \frac{-1}{2} \int_{r_{-n+1}}^{r_{-n}} \psi_\theta(u) du \end{aligned}$$

d'où ensuite par récurrence,  $\int_{r_{-n}}^{r_{-n+1}} \psi_\theta(x) dx = (-2)^n \int_0^1 \psi_\theta(x) dx$ . Comme  $\int_0^1 \psi_\theta(x) dx > 0$ , on en déduit la divergence de la série  $\sum \int_{r_{-n-1}}^{r_{-n}} \psi_\theta(x) dx$  et donc la divergence de l'intégrale  $\int_0^1 \psi_\theta(x) dx$