ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

I Etudes de suites

❶ Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$P(n)$: c_n et λ_n existent et valent $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n}); \lambda_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

La propriété $P(1)$ est vraie.

Si l'on suppose $P(n)$ vraie alors c_n est positif (car $c_n = \cos(\frac{\pi}{2^n})$) donc c_{n+1} existe et vaut $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

Comme c_{n+1} est positif alors λ_{n+1} existe et vaut :

$$\lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}} = \frac{2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})}{\cos(\frac{\pi}{2^n})} = 2^{n+1} \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}) .$$

On pose alors $\theta_n = \frac{\pi}{2^n}$ et $\alpha_n = 2^n$. On a $\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{\pi}{2^n} = \pi.$$

❷ Rappelons la propriétée $\forall x \in R, \left|\sin^{(2p+3)}(x)\right| \leq 1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2p+1 appliquée à la fonction sinus entre 0 et x donne :

$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2p+3}}{(2p+3)!}$$

En particulier pour p=0 et $x = \frac{\pi}{2^n}$ on déduit

$$|\pi - \lambda_n| = 2^n \left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n}\right| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$$

On peut prendre $N_1 = 12$ car on a $\frac{\pi^3}{6 \times 4^n} \leq 10^{-6}$

❸ L'inégalité de la question ❷ appliquée à $x = \frac{\pi}{2^n}$, après multiplication par 2^n, donne :

$$\left|\lambda_n - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{4^{nk}(2k+1)!}\right| \leq \frac{\pi^{2p+3}}{4^{n(p+1)}(2p+3)!}$$

Comme $\frac{1}{4^{n(p+1)}}$ est négligeable devant $\frac{1}{4^{np}}$, on déduit le développement :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \ldots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{pn}}\right)$$

❹ Pour p=2 le développement précédent donne :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

On en déduit : $\lambda_n^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

Et $\lambda_n^{(1)} - \pi \sim -\frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+2}}$

❺ Pour tout α la formule de la question ❹ donne :

$$\alpha\lambda_n^{(1)} + (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)} = \pi - \frac{\pi^5}{30 \times 4^{2n+4}}(15\alpha + 1) + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

le réel $\alpha = -\frac{1}{15}$ est l'unique réel tel que $\lambda_n^{(2)} - \pi$ est négligeable devant 16^{-n}.

❻ L'inégalité de la question ❸ pour p=2 prouve

$$-\frac{\pi^7}{7!4^{3n}} \le \lambda_n - \pi + \frac{\pi^3}{6\times 4^n} - \frac{\pi^5}{120\times 16^n} \le \frac{\pi^7}{7!4^{3n}}$$

En combinant les inégalités obtenues pour n et n+1 on déduit :

$$\left|\lambda_n^{(1)} - \pi + \frac{4\pi^5}{120\times 16^{n+1}}\right| \le \frac{68\pi^7}{3\times 7!4^{3n+3}}$$

En combinant à nouveau ces inégalités pour n et n+1 on a :

$$-\frac{17\pi^7}{9\times 7!4^{3n+3}} \le \lambda_n^{(2)} - \pi \le \frac{17\pi^7}{9\times 7!4^{3n+3}}$$

Finalement $\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \le \frac{17\pi^7}{576\times 7!4^{3n}}$ On constate que pour $N_2 = 3$ on a :

$$\left|\lambda_n^{(2)} - \pi\right| \le 10^{-6}.$$

II Polynômes de Bernoulli

❶ L'application F définie par $F(x) = G(x) - A$, où A est le nombre réel $A = \int_0^1 G(t)dt$, convient car F est, comme G de classe C^1 et de dérivée f et en outre on a $\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 G(t)dt - A = 0$. Si F_1 et F_2 sont deux solutions, $C = F_1 - F_2$ est de dérivée nulle sur $[0,1]$, elle est donc constante sur $[0,1]$ et on a $C = \int_0^1 Cdt = 0$ Il existe donc une unique application de classe C^1 vérifiant les deux conditions

❷ D'après la question précédente les conditions données définissent une unique suite $(B_n)_{n\ge 0}$ de fonctions de classe C^1.
Par définition de cette suite on a
$\forall n \in N, B_n^{(n)} = 1$ donc B_n est une fonction polynômiale de degré n et de terme dominant $\frac{X^n}{n!}$. D'après la question ❶ On a

$$\forall n \in N\, B_{n+1}(x) = \int_0^x B_n(t)dt - \int_0^1 B_n(t)dt$$

On en déduit

$B_1 = X - 0{,}5$ $B_2 = \dfrac{6X^2 - 6X + 1}{12}$ $B_3 = \dfrac{2X^3 - 3X^2 + X}{12}$ $B_4 = \dfrac{X^4 - 2X^3 + X^2}{24} - \dfrac{1}{24 \times 30}$

❸ Pour $n \geq 2$ on a $B_n(0) = B_n(1)$ .car :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n^{'}(t)dt = \int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$$

❹ La suite $(C_n)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions de définition de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. En effet, on a :

$C_à = B_0 = 1$ et si on a $B_n = C_n$, alors on a

$C_{n+1}^{'}(X) = (-1)^{n+1}(-B_{n+1}{}^{'}(1-X)) = (-1)^n(-B_n(1-X)) = C_n(X)$

Et en posant $u = 1 - t$

$$\int_0^1 C_{n+1}(t)dt = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(u)du = 0$$

L'unicité de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ assure l'égalité.
Ainsi on a pour tout n et tout x

$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$

Le graphe de B_n est donc symétrique par rapport à la droite d'équation x=0,5 si n est pair. Il est symétrique par rapport au point de coordonnées (0,5 , 0) si n est impair. En particulier pour n impair et x=0,5 on déduit

$B_n(0{,}5) = 0$ et pour x=0, tenant compte de $B_n(0) = B_n(1)$, on déduit

$B_n(0) = B_n(1) = 0$

❺ Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $m \in N$ tel que B_{2m+1} s'annule sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et considérons m_0 le plus petit de ces entiers m.

Comme $B_1 = X - 0{,}5$ on a $m_0 \geq 1$ On sait que B_{2m_0+1} s'annule sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$; il s'annule donc au moins trois fois $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. D'après le théorème de Rolle, $B_{2m_0} = B_{2m_0+1}^{'}$ s'annule donc au moins deux fois sur . Cette dernière propriété contredit le caractère minimal de m_0. L'hypothèse était absurde.

Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$; il existe $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = xB_{2m}^{'}(c) = xB_{2m-1}(c)$

Ainsi, sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$ a le signe de B_{2m-1} . Il en est de même sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car pour $x > 0{,}5$ on a $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$B_{2m}(x) - B_{2m}(0) = B_{2m}(1-x) - B_{2m}(0) = (1-x)B_{2m}^{'}(c) = (1-x)B_{2m-1}(c)$$

III Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

❶ Pour tout N entier naturel non nul et $t \in]0,1[$ on a $e^{2ik\pi t} \neq 1$ et :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \sum_{k=-N}^{k=N} e^{2ik\pi t} = e^{-2iN\pi t}\,\frac{1 - e^{-2i(2N+1)\pi t}}{1 - e^{-2i\pi t}} = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

❷ Sur $]0,1[$ on a

$$\varphi_n(t) = \frac{f(t)}{g(\pi t)} \text{ avec } f(t) = \frac{B_b(t) - B_n(0)}{\pi t} \text{ et } g(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Or f est une fonction polynomiale donc elle admet un prolongement C^{∞} sur R. On prolonge la fonction g en zéro en posant $g(0) = 1$, le prolongement de g est alors une fonction C^{∞} sur R car c'est une fonction développable en série entière de rayon infinie, de plus g ne s'annule sur R. Donc φ_n admet un prolongement continûment dérivable. à $[0,1]$.

❸ Soit f une fonction continûment dérivable sur $[0,1]$. Notons M_0 la borne supérieure de $|f|$ sur $[0,1]$ et M_1 la borne supérieure de $|f^{'}|$ sur $[0,1]$.

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(xt)dt\right| = \left|-\frac{1}{x}\left[f(t)\cos(xt)\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 f^{'}(t)\cos(xt)dt\right| \leq \frac{2M_0 + M_1}{x}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0$

❹ Pour n impair le changement de variable $t=1-u$ montre que l'on a $I_{n,k}=0$. Pour $n\geq 4$ pair on a $B_{n-1}(0)=B_{n-1}(1)=0$ et deux intégrations par parties donnent :

$$I_{n,k}=\left[B_n(t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1-\int_0^1 B_n^{'}(t)\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}dt$$

$$=\left[B_{n-1}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1-\int_0^1 B_{n-1}^{'}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}d$$

$$=-\int_0^1 B_{n-2}(t)\frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}d=\frac{I_{n-2,k}}{4k^2\pi^2}.$$

Reprenons le calcul avec n=2, en tenant compte de $B_1(1)=-B_1(0)=\frac{1}{2}$. On trouve $I_{2,k}=\frac{1}{(2k\pi)^2}$. On déduit $I_{2p,k}=\frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$.

❺ Comme $\int_0^1\cos(2k\pi t)dt=0$ pour $k\geq 1$ on a pour $m\geq 1$ et N entier naturel :

$$\int_0^1\varphi_{2m}(t)\sin\big((2N+1)\pi t\big)dt=\int_0^1\big(B_{2m}(t)-B_{2M}(0)dt\big)+2\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\big(B_{2m}(t)-B_{2M}(0)dt\big)\cos\big((2N+1)\pi t\big)dt$$

$$=-B_{2M}(0)+2\sum_{k=1}^{N}I_{2m,k}$$

$$=-B_{2M}(0)+2(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$$

La fonction φ_{2m} étant C^1 sur $[0,1]$, la question ❸ prouve que :

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2m}}=(-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}(0)$$

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}$ converge et a pour somme $(-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}(0)$

En particulier on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^{42}}{90}.$$

❻ Pour $p \geq 2$ et $k \geq 1$ on a $k^p \geq k^2$. En majorant $\frac{1}{k^2}$ par $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$ pour $k \geq 2$, on obtient :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^P} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2$$

On en déduit

$$\left|B_{2m}(0)\right| \leq \left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{2m}}\right) 2^{1-2m} \pi^{-2m} \leq \frac{4}{\left(4\pi^2\right)^m}.$$

IV Formule sommatoire d'Euler

❶ Montrons cette formule par récurrence sur m.

Pour m=0 on a $B_1(1) = -B_1(0) = \frac{1}{2}$ donc

$$\int_0^1 f'(t) B_1(t) dt = \left[f(t) B_1(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt$$

c'est la formule demandée.

Supposons cette formule vraie pour $m \geq 1$ et considérons f de classe C^{2m+3}. On a

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t) dt = \left[f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+3)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B'_{(2m+3)}(t) dt$$

Ce qui, d'après les résultats de la partie II prouve

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t) dt = -\int_0^1 f^{(2m+2)}(t) B_{(2m+2)}(t) dt$$

Une intégration par partie donne

$$\int_0^1 f^{(2m+3)}(t) B_{(2m+3)}(t) dt - \left[f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+2)}(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B'_{(2m+2)}(t) dt =$$

$$B_{(2m+2)}(0) \frac{f^{(2m+1)}(1) - f^{(2m+1)}(0)}{2} + \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t) dt$$

L'hypothèse de récurrence permet d'obtenir la formule pour m+1.

❷ Une intégration par partie donne :

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt = \left[f^{(2m+1)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)\right]_0^1$$
$$- \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt$$
$$= -\int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt$$

Comme $B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)$ est de signe constant que l'on note ε sur $[0,1]$, on déduit :

$$-\varepsilon \inf_{t\in[0,1]} f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0) \leq \varepsilon \int_0^1 f^{(2m+2)}(t)\left(B_{(2m+2)}(t) - B_{(2m+2)}(0)\right)dt \leq -\varepsilon \sup_{t\in[0,1]} f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)$$

On a alors :

$$\inf_{t\in[0,1]}\left[f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)\right] \leq \int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt \leq \sup_{t\in[0,1]}\left[f^{(2m+2)}(t)B_{(2m+2)}(0)\right]$$

L'existence de c est conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.
La majoration est alors :

$$\left|\int_0^1 f^{(2m+1)}(t)B_{(2m+1)}(t)dt\right| \leq \left\| f^{(2m+2)}\right\| \left|B_{(2m+2)}(0)\right|$$

❸ Notons $T(f)=\frac{1}{n}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ et $h=\frac{1}{n}$.

Les formules obtenues aux questions IV ❶ et ❷ lorsque m=2 donnent l'existence de constantes C_i bornées en valeur absolue par $\left\| f^{(6)} \right\|$ telles que :

$$\frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} f(x)dx=\int_0^1 f(ih+ht)dt=\frac{f((i+1)h)+f(ih)}{2}-B_2(0)h\big(f'((i+1)h)-f'(ih)\big)$$
$$-B_4(0)h^3\big(f^{(3)}((i+1)h)-f^{(3)}(ih)\big)-B_6(0)h^6C_i$$

En sommant ces relations on obtient :

$$\int_0^1 f(t)dt=T(f)-B_2(0)\big(f'(1)-f'(0)\big)h^2-B_4(0)\big(f^{(3)}(1)-f^{(3)}(0)\big)h^4-r(h)$$

avec $\left|r(h)\right|\le h^6B_6(0)\left\| f^{(6)} \right\|\le\left\| f^{(6)} \right\|\frac{h^6}{16\pi^6}$