SESSION D' AVRIL 2001

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PROBLEME I

1. (a) Le nombre $\sup\limits_{x \in X} h_m(x)$ est un majorant des nombres $mx - f(x)$ lorsque $x \in X$. Donc :

$$\forall m \in X^\circ,\ \forall x \in X,\ f^\circ(m) \geq mx - f(x)$$

Ainsi on a :

$$\forall m \in X^\circ,\ \forall x \in X,\ f^\circ(m) + f(x) \geq mx$$

Fixons $x \in X$ alors on a :

$$\forall m \in X^\circ,\ f(x) \geq mx - f^\circ(m)$$

$f(x)$ est un majorant des valeurs $mx - f^\circ(m)$ lorsque $m \in X^\circ$. Donc

$$f(x) \geq \sup_{m \in X^\circ} mx - f^\circ(m)$$

(b) Soit $m_1 \in X^\circ$ et $m_2 \in X^\circ$ alors

$$\exists M_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ m_1 x - f(x) \leq M_1$$

$$\exists M_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ m_2 x - f(x) \leq M_2$$

Soit $\lambda \in [0,1]$ en posant $M = \lambda M_1 + (1-\lambda) M_2$ on obtient

$$\forall x \in X,\ (\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2) x - f(x) \leq M$$

Donc $\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2 \in X^\circ$

(c) Soit $m \in \mathbb{R}$. X est un compact, la fonction h_m est continue sur X donc h_m est bornée et atteint ses bornes. En particulier $X^\circ = \mathbb{R}$ et

$$\exists x_0 \in X,\ h_m(x_0) = \sup_X (mx - f(x))$$

$$\exists x_0 \in X, f^\circ(m) = mx_0 - f(x_0)$$

2. (a) $h_m(x) = mx - e^x$ et $h'_m(x) = m - e^x$.

- Si $m < 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h_m(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} h_m(x) = -\infty$. Donc $m \notin X^\circ$.
- Si $m = 0$, la fonction h_m est décroissante sur $\mathbb{R}$, $lim_{x \to -\infty} h_m(x) = 0$, $\lim x \to \infty h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(0) = 0$.
- Si $m > 0$, la fonction h_m est croissante sur $]-\infty, \ln m]$ et décroissante sur $[\ln m, \infty[$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h_m(x) = -\infty$ donc $m \in X^\circ$ et $f^\circ(m) = m \ln m - m$.

En résumé $X^\circ = \mathbb{R}^+$.

Notons $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$. On a $H_m(0) = 0$ et si $x > 0$, $H_m(x) = (m+1)x - x\ln x$. Sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $H'_m(x) = m - \ln x$. Donc H_m est croissante sur $]0, e^m]$ décroissante sur $[e^m, \infty[$. Elle atteint son maximun en $x = e^m$ et $H_m(e^m) = e^m$. Ainsi

$$\begin{array}{ll} X^\circ = \mathbb{R}^+ & f^\circ(0) = 0 \text{ si } x > 0\ f^\circ(x) = x(lnx - 1) \\ X^{\circ\circ} = \mathbb{R} & f^{\circ\circ}(x) = e^x \end{array}$$

(b) $h_m(x) = mx - \frac{x^3}{3}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} h_m(x) = \infty$ donc $X^\circ = \emptyset$

(c) $h_m(x) = (m - \alpha)x + \beta$

- Si $m \neq \alpha$, h_m est non bornée et $m \notin X^\circ$
- Si $m = \alpha$, h_m est constante et vaut β.

Finalement $X^\circ = \{\alpha\}$ et $f^\circ(\alpha) = \beta$. $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ est une fonction bornée et $\sup\limits_{x=\alpha}(mx - f^\circ(x)) = m\alpha - \beta$ Donc $X^{\circ\circ} = \mathbb{R}$ et $f^{\circ\circ}(x) = \alpha x - \beta$.

(d) $h_m(x) = mx - f(x)$. L'image de h_m est $h_m(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{-m - 1, 0, m - 2, 2m - 1\}$. Cet ensemble est toujours majoré, on trouve $X^\circ = \mathbb{R}$

$$f^\circ(m) = \begin{cases} -m - 1 & si \quad m \leq -1 \\ 0 & si \quad -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ 2m - 1 & si \quad m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En calculant $H_m(x) = mx - f^\circ(x)$ on trouve

$$H_m(x) = \begin{cases} (m+1)x+1 & si \quad x \leq -1 \\ mx & si \quad -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (m-2)x+1 & si \quad \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

Finalement H_m est majoré si est seulement si $m \in [-1,2]$ $X^{\circ\circ} = [-1,2]$ et $f^{\circ\circ}(x) = -x$ si $x \in [-1,0]$ et $f^{\circ\circ}(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in [0,2]$

3. (a) Si $(X,f) \leq (Y,g)$ et $(Y,g) \leq (Z,h)$ alors $Z \subset X$ et $\forall x \in Z,\ f(x) \leq h(x)$ donc $(X,f) \leq (Z,h)$.
   Si $(X,f) \leq (Y,g)$ et $(Y,g) \leq (X,f)$ alors $X = Y$ et $\forall x \in X,\ f(x) = g(x)$ donc $(X,f) = (Y,g)$.

   (b) On suppose que $Y \subset X$, $\forall x \in Y,\ f(x) \leq g(x)$ et que X° est non vide. Soit $m \in X^\circ$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X,\ mx - f(x) \leq M$. Donc $\forall x \in Y,\ mx - g(x) \leq M$. Donc $m \in Y^\circ$. On a montrer que $X^\circ \subset Y^\circ$. Pour $m \in X^\circ, \forall x \in Y,\ mx - g(x) \leq mx - f(x)$. Pour $m \in X^\circ$

$$\sup_{x \in Y} mx - g(x) \leq \sup_{x \in Y} mx - f(x) \leq \sup_{x \in X} mx - f(x)$$

   Donc $g^\circ(m) \leq f^\circ(m)$.

   (c) On a l'équivalence de propositions suivantes :

$$(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X,f)$$

$$X \subset \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X,\ \phi_{m,p}(x) \leq f(x)$$

$$\forall x \in X,\ mx - f(x) \leq p$$

$$m \in X^\circ \text{ et } f^\circ(m) \leq p$$

   On a montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X,f)$ si et seulement si $m \in X^\circ$ et $p \geq f^\circ(m)$.
   Soit $m \in X^\circ$ si $f^\circ(m) \leq p$ alors $\varphi(x) \geq \phi_{m,p}(x)$ En utilisant le résultat au dessus on obtient que si
   $m \in X^\circ$ et $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X,f)$ alors $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (\mathbb{R}, \varphi)$. La droite d'équation $y = \varphi(x)$ est la droite au dessous de f la plus proche de f et de pente m.

4. (a) D'après la question 1)(a) soit $x \in X$ $\forall m \in X^\circ,\ xm - f^\circ(m) \leq f(x)$ Cela démontre que la fonction $H_x(m) = xm - f^\circ(m)$ pour $x \in X$ est bornée par $f(x)$ sur l'ensemble X°. Donc $X \subset X^{\circ\circ}$ et $f^{\circ\circ}(x) \leq f(x)$. Soit encore $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) \leq (X,f)$.

(b) D'après la question 3)(b) et la question précédente

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \geq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

Par ailleurs la question précédente appliquée à la fonction f° prouve que :

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) \leq (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

En utilisant la question 3)(a) on conclu que

$$(X^{\circ\circ\circ}, f^{\circ\circ\circ}) = (X^{\circ}, f^{\circ}).$$

(c) D'après la question 1)(c) $X^{\circ} = \mathbb{R}$. Une droite passant par les points $A = (-a, f(-a))$ et $A' = (a', f(a')$ $(a' \neq -a)$ a pour pente $\frac{f(a')-f(-a)}{a'+a}$ Cette droite est tangente en A' si la pente de cette droite est la derivée de f au point a' . A' est solution du problème si et seulement si

$$\frac{a'^3 + a^3}{a' + a} = 3a'^2,$$

soit si a' est solution de $2(a' - \frac{a}{2})(a' - \frac{a}{2})(a' + a) = 0$ et $a' \neq a$, donc $a' = \frac{a}{2}$. Le point A' a pour coordonnées $(\frac{a}{2}, \frac{a^3}{24})$

PROBLEME II

1. (a) $y_n(-x) = \cos(n\arccos(-x)) = \cos(n(\pi - \arccos x)) = (-1)^n \cos(n\arccos x)$
y_n est de la même parité que n. $z_n(-x) = \sin(n\arccos(-x)) = (-1)^{n+1}\sin(n\arccos x)$, z_n est de même parité que $n-1$.
$y_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2})$.
Si n est impair, $y_n(0) = 0$. Si n est pair, $y_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$. $z_n(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$.
Si n est pair $z_n(0) = 0$, si n est impair $z_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$.
$y_n(1) = 1$ et $z_n(1) = 0$

(b) Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$, donc les fonctions y_n et z_n sont dérivables sur $]-1,1[$.

$$y'_n(x) = n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}z_n(x)$$

$$z'_n(x) = -n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arccos x) = -\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}y_n(x)$$

(c) Rappelons les équivalences :

$$(cosx - 1) \sim_0 \frac{-x^2}{2}$$

$$sinx \sim_0 x$$

Elles impliquent :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(n\theta)-1}{\cos\theta - 1} = \lim_{\theta\to 0}\frac{n^2\theta^2}{\theta^2} = n^2$$

Et comme la limite de la quantite $\frac{n\theta}{\theta^2}$ lorsque $\theta \to 0$ n'existe pas, la limite lorsque $\theta \to 0$ de $\frac{\sin(n\theta)}{\cos\theta - 1}$ n'existe pas. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(n\arccos x)-1}{x-1} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(n\theta)-1}{\cos\theta - 1} = n^2$$

La fonction y_n est dérivable en 1 de nombre dérivée n^2. La fonction y_n étant de même parité que n, y_n est dérivable en -1 de dérivée $(-1)^{n-1}n^2$. En posant $\theta = \arccos(x)$ on obtient que la fonction z_n n'est pas dérivable en 1. La fonction z_n étant de même parité que $n-1$, z_n n'est pas dérivable en -1.

(d) L'équation $y_n(x)=0$ est équivalente à $n\arccos x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ où encore

$$\arccos x \in \{\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n},\ k\in\mathbb{N}\}$$

$\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}$ appartient a $[0,\frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k\in\{0,\cdots,E(\frac{n-1}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0,1]$ sont :

$$\{y_k=cos(\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}),\ k\in\{0,\cdots,E(\frac{n-1}{2})\}\}.$$

$z_n(x)=0$ est équivalente à $n\arccos x=k\pi$ où encore à

$$\arccos x\in\{k\frac{\pi}{n},\ k\in\mathbb{N}\}$$

$k\frac{\pi}{n}$ appartient a $[0,\frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $k\in\{0,\cdots,E(\frac{n}{2})\}$ Les solutions appartenant à $[0,1]$ sont

$$\{z_k=cos(k\frac{\pi}{n}),\ k\in\{0,\cdots,E(\frac{n}{2})\}\}.$$

L'inéquation $y_n(x)\geq 0$ est équivalente à

$$n\arccos x\in(\cup_{k\in\mathbb{N}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi])\cap[0,\pi]$$

- si n est pair, $y_n(x)\geq 0$ est équivalent à

$$\arccos x\in[0,\frac{\pi}{2n}]\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n},\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}]\cup[-\frac{\pi}{2n}+\pi,\pi]$$

- si n est impair, $y_n(x)\geq 0$ est équivalente à

$$\arccos x\in[0,\frac{\pi}{2n}]\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n},\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n}]$$

La fonction arccos est décroissante. A_n est l' ensemble :

- pour n pair

$$[\cos(\pi),\cos(-\frac{\pi}{2n}+\pi)]\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\cos(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\pi),\cos(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\pi)]\cup[\cos(\frac{\pi}{2n}),\cos(0)]$$

- pour n impair

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\cos(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\pi),\cos(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\pi)]\cup[\cos(\frac{\pi}{2n}),\cos(0)]$$

L'inéquation $z_n(x) \geq 0$ est équivalent à $n \arccos x \in \cup_{k\in\mathbb{N}}[0+2k\pi, \pi + 2k\pi] \cap [0, \pi]$

$$\arccos x \in \cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n}]$$

La fonction arccos est décroissante. B_n est l' ensemble

$$\cup_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})}[\cos(\frac{\pi}{n}+\frac{2k}{\pi}), \cos(\frac{2k}{\pi})]$$

Le signe de $y'_n(x)$ est le même que de celui de $z_n(x)$. y_n est croissante sur A_n, décroissante ailleurs. Le signe de $z'_n(x)$ est l'opposé de celui de $y_n(x)$. z_n est décroissante sur B_n, croissante ailleurs.

2. (a) $y_0(x) = 1$ $z_0(x) = 0$ $y_1(x) = x$ et $z_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

   (b)

$$y_{n+2}(x) + y_n(x) = 2\cos((n+2)\arccos x) + \cos(n \arccos x)$$
$$= \cos((n+1)\arccos x)\cos(\arccos x).$$

   $y_{n+2}(x) + y_n(x) = 2xy_{n+1}(x)$.
   De même on trouve $z_{n+2}(x) + z_n(x) = 2xz_{n+1}(x)$

   (c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: y_n est une fonction polynôme de degré n et $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$z_n(x) = \sqrt{1-x^2}g_n(x)$$

   où g_n est une fonction polynôme de degré $n-1$. Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies. Si on suppose $n \geq 1$ et les propositons $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $k \leq n$ alors $y_{n+1} = 2xy_n - y_{n-1}$, ainsi y_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. $z_{n+1} = 2xz_n - z_{n-1} = (2xg_n(x) - g_{n-1}(x))\sqrt{1-x^2}$ donc $g_{n+1} = 2xg_n(x) - g_{n-1}(x)$ est un polynome de degré n.

   (d) Les formules de Moivre sont

$$cos(n\theta) + isin(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=n}(i)^k C_n^k \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$$

$$cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta)$$

$$sin(n\theta) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)$$

On obtient alors

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^{2k}$$

$$z_n(x) = \sum_{k=1}^{k=E(\frac{n-1}{2})} (-1)^k C_n^{2k+1} x^{n-2k-1} (1-x^2)^{2k+1}$$

(e) Les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

sont l'ensemble des fonctions $v(\theta) = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Maintenant on pose $\arccos x = \theta$. $f(x) = f(\cos\theta)$ $\frac{d}{d\theta}(f \circ \cos)(\theta) = -\sin(\theta)f'(\cos\theta)$ $\frac{d^2}{d\theta^2}(f \circ \cos)(\theta) = -\cos(\theta)f'(\cos\theta) + \sin^2(\theta)f''(\cos\theta)$ Une fonction $f(x)$ est solution de

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

si et seulement si $f(\cos\theta))$ est solution de :

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

On déduit que y_n et z_n sont deux solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

Les solutions générales sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle sont les fonctions $f(x) = \alpha y_n(x) + \beta z_n(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3. (a) Soit $y_1 \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, $y_2 \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ alors

$$F(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha F(y_1) + \beta F(y_2).$$

F est une application linéaire.
Si $y \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$ alors $F(y) \in \mathcal{C}^\infty]-1,1[$, F est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty]-1,1[$.

(b) La fonction $y = 0$ est solution de $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ Soit y une solution de l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ qui s'annule en un point noté $x_0 \in]-1,1[$ alors $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$. D'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles alors $y = 0$. Donc si y est une solution non nulle de

$f(x, y(x), y'(x)) = 0$, elle ne s'annule jamais sur l'intervalle $]-1, 1[$. Elle vérifie :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (n - \frac{1}{2})\frac{-2x}{1-x^2}$$

Il existe $C \in \mathbb{R}^{+\star}$ telle que $y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ est

$$\{y(x) = C(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\ C \in \mathbb{R}^+\}.$$

$u \in \mathrm{Ker}(F)$ et $u(0) = 1$ est équivalent à $u(x) = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$.

(c)

$$Y(x) = (1-x^2)y'(x) + (2x-1)xy(x)$$

En dérivant on obtient

$$Y^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (1-x^2)^{(p)} y^{(k-p+1)}(x) + \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (2n-1)x^{(p)} y^{(k-p)}(x)$$

$$Y^{(k)}(x) = ((2n-1)x - 2kx)y^{(k)}(x) + (1-x^2)y^{(k+1}(x) + (k(2n-1) - k(k-1))y^{(k-1)}(x)$$

Cette relation pour u donne :

$$(1-x^2)u^{(k+1)}(x) = -((2n-1)x - 2kx)u^{(k)}(x) - (k(2n-1) - k(k-1))u^{(k-1)}(x)$$

En particulier pour $x = 0$:

$$u^{(k+1)}(0) = -k(2n-k)u^{(k-1)}(0).$$

$u(0) = 1$ $u'(0) = 0$, une récurrence prouve :

$$u^{(2p)}(0) = (-1)^p 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2p+1)$$

$u^{(2p-1)}(0) = 0$, $u^{(2n)}(0) = (-1)^n((2n-1)!)^2$.

(d) Utilisons la méthode de variation des constantes. Soit y une solution posons $y(x) = c(x)u(x)$ où $c(x)$ est la nouvelle inconnue. $c(x)$ est solution de l'équation

$$(1-x^2)c'(x) = \lambda c(x).$$

Si c n'est pas la fonction nulle alors

$$\frac{c'(x)}{c(x)} = \frac{\lambda}{1-x^2}$$

L'espresssion de c est : $c(x) = D(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{\lambda}{2}}$ avec $D \in \mathbb{R}^{+\star}$ En ajoutant la solution nulle on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f(x,y,y') = \lambda y$ est :

$$\{y(x) = D(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{\lambda}{2}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},\ D \in \mathbb{R}^+\}$$

$$\{y(x) = D(1+x)^{\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}},\ D \in \mathbb{R}^+\}$$

Les solutions sont des fonctions polynômes si et seulement si $\frac{\lambda}{2}+n-\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ et $n-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2} \in \mathbb{N}$. Donc si on pose $\lambda = 2p-1$, il existe des solutions polynômes si et seulement si $p \in \mathbb{Z}$ et $-n+1 \leq p \leq n$. La solution, valant 1 en 0, est le polynôme $P_\lambda(x) = (1+x)^{n+p}(1-x)^{n-p}$.