

SESSION D' AVRIL 2001

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE
APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Les problèmes I et II sont indépendants, ils sont de longueurs équivalentes.

Probleme I

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$. Soit m un réel, on note h_m la fonction définie sur X par $h_m(x) = mx - f(x)$. On note X° l'ensemble des nombres réels m pour lesquels l'ensemble $\{h_m(x), x \in X\}$ est majoré. Lorsque X° est non vide, on associe au couple (X, f) le couple (X°, f°) où f° est une fonction définie sur X° par $f^\circ(m) = \sup_{x \in X} (mx - f(x))$.

1. (a) Montrer que les deux inégalités suivantes sont vraies :

$$\forall x \in X, \forall m \in X^\circ, f(x) + f^\circ(m) \geq mx$$

$$\forall x \in X, f(x) \geq \sup_{m \in X^\circ} (mx - f^\circ(m))$$

- (b) Soient $m_1 \in X^\circ$ et $m_2 \in X^\circ$ tels que $m_1 \leq m_2$, montrer que l'intervalle $[m_1, m_2]$ est inclus dans X° .
- (c) Dans cette question on suppose que $X = [a, b]$ et que f est une fonction définie et continue sur X . Déterminer X° et montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f^\circ(m) = mx_0 - f(x_0)$.

2. On note $X^{\circ\circ} = (X^\circ)^\circ$ et $f^{\circ\circ} = (f^\circ)^\circ$.



- (a) Déterminer (X°, f°) lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$. Dans ce cas, déterminer le couple $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ associé à (X°, f°) .
- (b) Quel est l'ensemble X° lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^3}{3}$?

- (c) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer (X°, f°) puis $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \alpha x - \beta$.
- (d) Déterminer (X°, f°) puis $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ})$ lorsque $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ et $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 2$ et $f(2) = 1$.
3. Soient f une fonction définie sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur une partie Y non vide de $\mathbb{R}$. On notera $(X, f) \leq (Y, g)$ si et seulement si
- $$Y \subset X, \quad \forall x \in Y, \quad f(x) \leq g(x).$$
- (a) Montrer que si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (Z, h)$ alors $(X, f) \leq (Z, h)$.
Montrer que si $(X, f) \leq (Y, g)$ et $(Y, g) \leq (X, f)$ alors $(X, f) = (Y, g)$.
- (b) Montrer que $(X, f) \leq (Y, g)$ implique $(Y^\circ, g^\circ) \leq (X^\circ, f^\circ)$ lorsque X° est non vide.
- (c) Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^2$. On note $\phi_{m,p}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_{m,p}(x) = mx - p$. Montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ si et seulement si $m \in X^\circ$ et $p \geq f^\circ(m)$. Pour $m \in X^\circ$ on note φ_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx - f^\circ(m)$. Montrer que $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (X, f)$ implique $(\mathbb{R}, \phi_{m,p}) \leq (\mathbb{R}, \varphi)$. Quelle interprétation géométrique au graphe de la fonction f peut-on donner de ces propriétés?
4. (a) Montrer que pour tout couple (X, f) avec $X \neq \emptyset$ alors $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) \leq (X, f)$
- (b) Montrer que si $X \neq \emptyset$ et $X^\circ \neq \emptyset$ alors $(X^{\circ\circ}, f^{\circ\circ}) = (X^\circ, f^\circ)$
- (c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Notons $X = [-a, a]$. Soit f la fonction définie sur X par $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Déterminer la droite passant par le point $A = (-a, f(-a))$ est tangente en un point A' distinct de A à la courbe représentative de f . Donner les coordonnées de A' . Déterminer X° .



Probleme II

A $n \in \mathbb{N}$, on associe les fonctions y_n et z_n définies, pour $x \in [-1, 1]$ par :
 $y_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $z_n(x) = \sin(n \arccos x)$.

1. (a) Etudier la parité de y_n et z_n suivant la valeur de n . Calculer $y_n(0)$, $z_n(0)$, $y_n(1)$ et $z_n(1)$.
- (b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y_n et z_n sont dérivables sur $] -1, 1[$. Donner l'expression de $y'_n(x)$ en fonction de x et $z_n(x)$, ainsi que l'expression de $z'_n(x)$ en fonction de x et $y_n(x)$.
- (c) les rapports

$$\frac{\cos(n\theta) - 1}{\cos \theta - 1}; \frac{\sin(n\theta)}{\cos \theta - 1}$$



ont-ils une limite finie lorsque θ tend vers 0? Etudier la dérivabilité de y_n et z_n aux points $x = 1$ et $x = -1$.

- (d) Calculer les racines des équations $y_n(x) = 0$ et $z_n(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

Déterminer l'ensemble A_n des valeurs de $x \in [0, 1]$ pour lesquelles $y_n(x) \geq 0$ ainsi que l'ensemble B_n des valeurs $x \in [0, 1]$ pour lesquelles $z_n(x) \geq 0$.

Etudier les variations de $y_n(x)$ et $z_n(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[0, 1]$.

2. (a) Exprimer $y_0(x)$ et $z_0(x)$ ainsi que $y_1(x)$ et $z_1(x)$ sous une forme ne faisant pas intervenir de fonctions trigonométriques.
- (b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2}(x) + y_n(x)$ en fonction de x et $y_{n+1}(x)$, puis $z_{n+2}(x) + z_n(x)$ en fonction de x et $z_{n+1}(x)$.
- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est une fonction polynôme et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$z_n(x) = \sqrt{1 - x^2} g_n(x)$$

où g_n est une fonction polynôme. Préciser les degrés de y_n et g_n .

- (d) Retrouver ces derniers résultats en posant $\arccos x = \theta$ et en utilisant les formules de Moivre.
- (e) Intégrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + n^2 v = 0$$

où v est la fonction inconnue et θ la variable. En déduire que y_n et z_n sont deux solutions sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$

Donner les solutions générales sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle.

3. Dans la suite du problème on désigne par $\mathcal{C}^\infty] - 1, 1[$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $] - 1, 1[$.

- (a) Soit n un entier naturel et f la fonction de trois variables réelles x, α, α' définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, \alpha, \alpha') = (1 - x^2)\alpha' + (2n - 1)x\alpha$$

Montrer que l'application notée F qui à toute fonction $y \in \mathcal{C}^\infty] - 1, 1[$ associe la fonction $Y(x) = f(x, y(x), y'(x))$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty] - 1, 1[$. Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}^\infty] - 1, 1[$ l'équation $F(y) = g$ est une équation différentielle que nous noterons

 $f(x, y(x), y'(x)) = g.$

- (b) Résoudre l'équation différentielle $f(x, y(x), y'(x)) = 0$. En déduire l'existence d'une fonction $u \in \text{Ker}(F)$ telle que $u(0) = 1$. Donner l'expression de $u(x)$ pour $x \in] - 1, 1[$
- (c) Soit une fonction $y \in \mathcal{C}^\infty] - 1, 1[$ et $Y = F(y)$ son image par F . Vérifier que pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout $x \in] - 1, 1[$ la fonction $Y^{(k)}(x)$ (dérivée k^{ieme} de Y) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire à exprimer des dérivées $y^{(k+1)}(x), y^{(k)}(x), y^{(k-1)}(x)$ dont les coefficients dépendent de x . En déduire que pour tout entier $p \geq 1$

$$u^{(2p)}(0) = (-1)^p 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p - 1)(2n - 1)(2n - 3) \cdots (2n - 2p + 1)$$

et donner la valeur de $u^{(2p-1)}(0)$. Préciser la valeur de $u^{(2n)}(0)$.

- (d) Intégrer sur l'intervalle $] - 1, 1[$ l'équation différentielle $f(x, y, y') = \lambda y$ où λ est une constante. Déterminer les valeurs de λ telles que l'équation différentielle admet des solutions y qui sont des fonctions polynômes. Expliciter, pour chacune des valeurs de λ trouvées, le polynôme solution P_λ tel que $P_\lambda(0) = 1$.