SESSION D' AVRIL 2002

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRECTION DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Partie I

1. Si $(M, M') \in \Gamma^2$ alors $MM'^{-1} \in \Gamma$ car $\det(MM'^{-1}) = (\det M)(\det M')^{-1} = 1$. L'ensemble Γ, muni de la multiplication matricielle est un sous groupe de matrices carrées d'ordre deux inversibles, donc un groupe. L'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

   Tout élément S de $\mathcal{S}$ s'écrit sous la forme $S = \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels, ou encore $S = \frac{a+d}{2} I + \frac{a-d}{2} X + bY + cZ$. Les quatres matrices I, X, Y, Z sont linéairement indépendantes, elles engendrent $\mathcal{S}$ donc elles forment une base de $\mathcal{S}$.

2. Si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on trouve $t(S) = \frac{a+d}{2}$ et $S^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Notons que $t(S) = t(S^{-1})$ si $S \in \mathcal{S}$.

3. $(\alpha S \alpha^\star)^\star = \alpha S^\star \alpha^\star = \alpha S \alpha^\star$. Donc $\alpha S \alpha^\star \in \mathcal{S}$.

4. T_α est une application linéaire donc d'après la question précédente T_α est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. $\mathrm{Ker} T_\alpha = \{S \in \mathcal{S}, \alpha S \alpha^\star = 0\} = \{0\}$ Donc T_α est un automorphisme de $\mathcal{S}$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

5. (a) Si $T_\alpha(S) = I$ alors

$$1 = \det(T_\alpha(S)) = \det(\alpha)\det(S)\det(\alpha^\star) = \det(S).$$

La matrice doit vérifiée $\det(S) = 1$. De plus $S = \alpha^{-1}\alpha^{\star -1} = (\alpha^\star \alpha)^{-1}$. Si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\alpha^\star\alpha = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b\overline{b} & \overline{a}c + \overline{b}d \\ \overline{c}a + \overline{d}b & c\overline{c} + d\overline{d} \end{pmatrix}$

$$t(S) = t(S^{-1}) = \frac{1}{2}(a\overline{a} + b\overline{+}c\overline{c} + d\overline{d}) > 0$$

car $\alpha \neq 0$.

(b) Si α est solution de (1) alors on a les relations

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$(a\ b)S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 1$$

$$S\alpha^\star = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Donc

$$S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons que α vérifie (3). Notons

$$\alpha S\alpha^\star = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

D'après la première relation de (3) on trouve $A = 1$. Comme $S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$, on trouve $(c\ d)S\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 0$, soit $C = 0$. La matrice $\alpha S\alpha^\star$ est hermitienne, donc $B = \overline{C} = 0$. Finalement, $\det(S) = 1 = AD - BC = D = 1$. La matrice α est solution de (1).

(c) Un calcul donne

$$\begin{aligned} Q_S(v) = (t(S) - x(S))m\overline{m} + (y(S) + iz(S))m\overline{n} + \\ (y(S) - iz(S))\overline{m}n + (t(S) + x(S))n\overline{n}. \end{aligned}$$

En multipliant par $t(S) - x(S)$ et en utilisant la relation

$$\det(S) = 1 = t^2(S) - x^2(S) - y^2(S) - z^2(S)$$

on obtient :

$$(t(S) - x(S))Q_S(v) = |(t(S) - x(S))m + (y(S) + iz(S))n|^2 + |n|^2.$$

Par ailleurs $t(S) > 0$ et $t^2(S) - x^2(S) = 1 + y^2(S) + z^2(S) > 0$ donc $(t(S) - x(S)) > 0$. Cela implique $Q_S(v) > 0$ si $v \neq 0$ et $Q_S(v) = 0$ si $v = 0$.

(d) Si S vérifie les conditions (2). Soit $v = (m, n) \neq 0$. D'après la question précédente $Q_S(v) > 0$. Notons $a = \frac{m}{Q_S(v)^{\frac{1}{2}}}$, $b = \frac{n}{Q_S(v)^{\frac{1}{2}}}$ et

$$\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}.$$

Les relations (3) sont satisfaites donc l'équation (1) a des solutions.

Partie II

1. $\langle S, S\rangle = \det(S)$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

2. Un calcul donne

$$\langle T_\alpha(S+S'), T_\alpha(S+S')\rangle = \langle T_\alpha(S), T_\alpha(S)\rangle + \langle T_\alpha(S'), T_\alpha(S')\rangle + 2\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S')\rangle$$

Par ailleurs pour tout $M \in \mathcal{S}$ $\langle T_\alpha(M), T_\alpha(M)\rangle = \det(T_\alpha(M)) = \det(M)$. Donc on trouve $2\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S')\rangle = \det(S+S') - \det(S) - \det(S') = 2\langle S, S'\rangle$.

3. (a) Le produit de la matrice

$$\begin{pmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ -x(S_1) & -x(S_2) & -x(S_3) & -x(S_4) \\ -y(S_1) & -y(S_2) & -y(S_3) & -y(S_4) \\ -z(S_1) & -z(S_2) & -z(S_3) & -z(S_4) \end{pmatrix}^t$$

par la matrice

$$\begin{pmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{pmatrix}$$

est égale à la matrice

$$(\langle S_i, S_j\rangle)_{(i,j)}.$$

Donc

$$\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}^2 = (-1)^3 \Pi_{i=1}^4 \langle S_i, S_i\rangle \in \{1, -1\}$$

Le nombre $\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}^2$ est positif, il vaut 1. On a montrer les relations $\Pi_{i=1}^4 \langle S_i, S_i\rangle = -1$, et $|\det(S_1, S_2, S_3, S_4)| = 1$.

(b) Comme $\det(S_1, S_2, S_3, S_4) \neq 0$, S_1, S_2, S_3, S_4 sont indépendantes.

(c) Si toutes les matrices étaient de genre $-$, on aurai

$$1 = \Pi_{i=1}^{4} \langle S_i, S_i \rangle = -1$$

. Ceci est impossible, l'une au moins des matrices est de genre $+$.

(d)

$$\det T_\alpha = \det(T_\alpha(I), T_\alpha(X), T_\alpha(Y), T_\alpha(Z))$$

Un calcul montre que les vecteurs $T_\alpha(I), T_\alpha(X), T_\alpha(Y), T_\alpha(Z)$ sont des vecteurs deux à deux orthogonaux et de genre $+$ ou $-$. Donc d'après la question II 3. (a) $(\det T_\alpha)^2 = 1$.

4. L'une des matrices est de genre $+$, soit $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\det S_j = 1$. On a $t(S_j)^2 \geq 1$ (car $t^2(S_j) - x^2(S_j) - y^2(S_j) - z^2(S_j) = 1$) donc $t(S_j) \neq 0$. Si $t(S_j) > 0$ alors d'après la question I 5. (d) il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que $T_\alpha(S_j) = I$. Si $t(S_j) < 0$ alors $t(-S_j) > 0$ d'après la question I 5. (d) il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que $T_\alpha(-S_j) = I$ donc $T_\alpha(S_j) = -I$. Si deux des matrices sont de genre $+$, par exemple S_i et S_j avec $i \neq j$ alors $t(S_i)t(S_j) - x(S_i)x(S_j) - y(S_i)y(S_j) - z(S_i)z(S_j) = 0$ donc

$$(t(S_i)t(S_j))^2 \leq (x(S_i)x(S_j) + y(S_i)y(S_j) + z(S_i)z(S_j))^2 <$$
$$(x(S_i)^2 + y(S_i)^2 + z(S_i)^2)(x(S_j)^2 + y(S_j)^2 + z(S_j)^2)$$

D'où $(t(S_i)t(S_j))^2 < (1 - t(S_i)^2)(1 - t(S_j)^2)$ $t(S_i)^2 + t(S_j)^2 < 1$. Ceci est impossible car $t(S_i)^2 \geq 1$ et $t(S_i)^2 \geq 1$. On conclusion, nécessairement trois des matrices sont de genre $-$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

5.

$$\alpha \mathcal{R} \alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R} \ \ (1-t)\alpha + t\alpha' \in \Gamma$$
$$\alpha \mathcal{R} \alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R} \ \ \det((1-t)\alpha + t\alpha') = 1$$

L'application $t \to \det((1-t)\alpha + t\alpha')$ est un polynôme du second degré à valeur constante. Donc $\alpha \mathcal{R} \alpha'$ si et seulement si les coefficients devant t^2 et t du polynôme $t \to \det((1-t)\alpha + t\alpha')$ sont nuls.

(a) Un calcul donne $\det((1-t)\alpha + tI) = 1 + t(a + d - 2) + t^2(2 - d - a)$. On a $\alpha \mathcal{R} I$ si et seulement si $a + d = 2$.

(b) Un calcul donne $\det((1-t)\alpha + t\alpha') = (1-t) + t(ad' - cb')$. Finalement $\alpha \mathcal{R} \alpha'$ si et seulement si α' appartient à Γ (i.e. $ad' - cb' = 1$).

(c) $\det((1-t)\alpha + t\alpha'') = (1-t) + t(a'd - c'b)$. On a $\alpha \mathcal{R} \alpha''$ si et seulement si α'' appartient à Γ $(a'd - c'b = 1)$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

(d) Cherchons α' et α'' sous la forme $\alpha' = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ et $\alpha'' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$
Le système

$$\alpha'' \mathcal{R} I \;\; \alpha \mathcal{R} \alpha' \;\; \alpha' \mathcal{R} \alpha''$$

est équivalent à

$$ad' - cb' = 1 \; a'd' - c'b' = 1 \; a' + d' = 2$$

Ce système admet une solution par exemple si $c \neq 0$

$$d' = 0, b' = -\frac{1}{c}, a' = 2, c' = c$$

Si $c = 0$ alors $a \neq 0$ car $ad - bc = 1$. Une solution est alors

$$d' = \frac{1}{a}, b' = -\frac{1-a}{a}, a' = 2 - \frac{1}{a}, c' = \frac{a-1}{a}$$

(e) Notons $\alpha(t) = (1-t)\alpha + t\alpha'$ ou α' et α'' sont des solutions du système

$$\alpha'' \mathcal{R} I, \;\; \alpha \mathcal{R} \alpha', \;\; \alpha' \mathcal{R} \alpha''$$

un calcul montre que $|\det(T_{\alpha(t)})| = 1$. La fonction $t \to \det(T_{\alpha(t)})$ est une fonction polynômial en t continue vérifiant $|\det(T_{\alpha(t)})| = 1$ donc c'est une fonction constante. Cela prouve que $\det(T_\alpha) = \det(T_{\alpha(0)}) = \det(T_{\alpha(1)}) = \det(T_{\alpha'})$. De la même façon on montre que $\det(T_{\alpha'}) = \det(T_{\alpha''})$. Puis $\det(T_{\alpha''}) = \det(T_I) = 1$. En résumé

$$\det(T_\alpha) = \det(T_I) = 1.$$