SESSION D' AVRIL 2002

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie I

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, appartenant à $M_2(\mathbb{C})$, est hermitienne si et seulement si $M^\star = M$ (par définition $M^\star = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$). On notera Γ l'ensemble des matrices carrées d' ordre deux à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont le déterminant est égal à 1, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ hermitiennes.

1. Prouver que Γ, muni de la multiplication matricielle est un groupe et que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel réel dont une base, notée $\mathcal{B}$, est constituée par les quatre matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

On désignera dans la suite par $t(S), x(S), y(S), z(S)$ les composantes d'une matrice $S \in \mathcal{S}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$S = t(S)I + x(S)X + y(S)Y + z(S)Z.$$

2. Si $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donner l'expression de $t(S)$ et S^{-1} en fonction de a, b, c, d.

3. Quels que soient α appartenant à Γ et S appartenant à $\mathcal{S}$ montrer que $\alpha S \alpha^\star$ appartient à $\mathcal{S}$.

4. On note T_α l 'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$, définie par $T_\alpha(S) = \alpha S \alpha^\star$. Montrer que T_α est un automorphisme de $\mathcal{S}$.

5. On se propose d'étudier, pour une matrice $S \in \mathcal{S}$ fixée, l'équation d'inconnu α :

$$T_\alpha(S) = I \tag{1}$$

   (a) Montrer que, si l'équation (1) a une solution, les conditions suivantes sont nécessairement satisfaites par S

$$\det(S) = 1, t(S) > 0 \tag{2}$$

   (b) Etablir que, si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est solution de (1), on a :

$$(a\ b)S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

   Réciproquement, établir que, si ces deux relations (3) sont vérifiées avec $\det(S) = 1$, alors α est solution de (1).

   (c) On associe à la matrice S l'application Q_S de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, définie par :

$$Q_S(v) = (m\ n)S \begin{pmatrix} \overline{m} \\ \overline{n} \end{pmatrix} \text{ si } v = (m, n) \in \mathbb{C}^2$$

   Montrer que, si S vérifie les conditions (2), alors pour tout vecteur $v \in \mathbb{C}^2$ on a $Q_S(v) \geq 0$. Montrer que, si S vérifie les conditions (2), alors si $v \in \mathbb{C}^2$ et $Q_S(v) = 0$ on a $v = 0$.

   (d) En déduire que l'équation (1) a des solutions si et seulement si S vérifie les conditions (2).

Partie II

On définit sur $\mathcal{S}$ une forme bilinéaire symétrique, notée $\langle ., . \rangle$ par :

$$\forall S, S' \in \mathcal{S}, \langle S, S' \rangle = t(S)t(S') - x(S)x(S') - y(S)y(S') - z(S)z(S')$$

Dans la suite on dira que S est un vecteur de genre $+$ (Res. de genre $-$) si S vérifie la condition $\langle S, S \rangle = 1$ (Res. $\langle S, S \rangle = -1$). On dira que S est S' sont orthogonaux si $\langle S, S' \rangle = 0$.

1. Que représente le nombre $\langle S, S\rangle$ pour la matrice S?

2. Pour tous $S, S' \in \mathcal{S}$ $\alpha \in \Gamma$ comparer les nombres $\langle T_\alpha(S), T_\alpha(S')\rangle$ et $\langle S, S'\rangle$.

3. Soit $S_1, S_2, S_3, S_4 \in \mathcal{S}$ deux à deux orthogonaux, et de genre $+$ ou $-$.

   (a) Prouver que le carré du déterminant suivant :

   $$\begin{vmatrix} t(S_1) & t(S_2) & t(S_3) & t(S_4) \\ x(S_1) & x(S_2) & x(S_3) & x(S_4) \\ y(S_1) & y(S_2) & y(S_3) & y(S_4) \\ z(S_1) & z(S_2) & z(S_3) & z(S_4) \end{vmatrix}$$

   est égal à 1.

   (b) Les matrices S_1, S_2, S_3, S_4 sont-elles indépendantes?

   (c) Prouver que l'une au moins de ces matrices est de genre $+$.

   (d) Montrer que le déterminant de T_α a une valeur absolue égale à 1 quel que soit la matrice $\alpha \in \Gamma$.

4. Etant donné quatre matrices S_1, S_2, S_3, S_4 de $\mathcal{S}$ orthogonales deux à deux et de genre de $+$ ou $-$, démontrer qu'il existe une matrice $\alpha \in \Gamma$ telle que T_α applique l'un des vecteurs sur I ou $-I$ et que, nécessairement, trois des matrices sont de genre $-$.

5. On définit une relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments $\alpha, \alpha' \in \Gamma$ par la condition

   $$\alpha \mathcal{R} \alpha' \text{ si et seulement si } \forall t \in \mathbb{R} \ \ (1-t)\alpha + t\alpha' \in \Gamma$$

   Soit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   (a) A quelle condition sur α, a-t-on $\alpha \mathcal{R} I$?

   (b) Trouver les matrices $\alpha' = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & d' \end{pmatrix}$ satisfaisant $\alpha \mathcal{R} \alpha'$.

   (c) Trouver les matrices $\alpha'' = \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$ satisfaisant $\alpha \mathcal{R} \alpha''$.

   (d) Prouver qu'il existe au moins un couple de matrices $\alpha', \alpha'' \in \Gamma$ telles que

   $$\alpha'' \mathcal{R} I \ \ \alpha \mathcal{R} \alpha' \ \ \alpha' \mathcal{R} \alpha''.$$

   (e) En déduire que pour toute matrice $\alpha \in \Gamma$ le déterminant de T_α vaut 1.