

SESSION D' AVRIL 2003

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE
APPLIQUEE ABIDJAN

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES



- $G_1 = \alpha_1^0 = 1, G_2 = \alpha_2^0 + \alpha_2 = 0, G_3 = i\sqrt{3} G_4 = 2 + 2i.$
Si n divise r alors $\alpha_n^r = 1$ et $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr} = n.$
Si n ne divise pas r alors $\alpha_n^r \neq 1$ et $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr} = \frac{1-\alpha_n^{rn}}{1-\alpha_n^r} = 0.$
- Les décompositions sont $X^5 - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha_5^k)$ sur $\mathbb{C}$
et $X^5 - 1 = (X - 1)(X^2 - 2 \cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2 \cos(\frac{4\pi}{5})X + 1)$ sur $\mathbb{R}.$
- L'égalité $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ prouve $(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = (X^2 - 2 \cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2 \cos(\frac{4\pi}{5})X + 1).$
L'égalité des deux polynômes donne les relations $2 + 4 \cos(\frac{2\pi}{5}) \cos(\frac{4\pi}{5}) = 1$
et $-2 \cos(\frac{2\pi}{5}) - 2 \cos(\frac{4\pi}{5}) = 1.$
Les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ sont les solutions de l'équation $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ est la solution négative.
On trouve $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$
$$G_5 = 1 + \alpha_5 + \alpha_5^4 + \alpha_5^9 + \alpha_5^{16} = 1 + 2\alpha_5 + 2\alpha_5^{-1} = \sqrt{5}.$$
- L'expression de A_n est $A_n = (\alpha_n^{(i-1)(j-1)})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}. A_n^2 = (c_i^j)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$
avec $c_i^j = \sum_{k=1}^n \alpha_n^{(i+j-2)(r-1)} = H_{i+j-2}.$ D'après le calcul de $H_r,$ on obtient $A_n^2 = nB_n.$
$$\text{Tr} A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{k^2} = G_n.$$

$$B_n^2 = (\sum_{r=1}^n b_i^r b_r^j)_{i,j \in \{1, \dots, n\}} = I_n.$$

5. Soit $u \neq 0$ un vecteur propre de A associé à λ alors $Au = \lambda u$ et $A^p u = \lambda^p u$, λ^p est une valeur propre de A^p .

Si λ est une valeur propre de A_n alors λ^4 est une valeur propre de $n^2 I_n$ et donc $\lambda^4 = n^2$.

A_n admet au plus quatre valeurs propres parmi $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$

6. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ alors $x = \frac{1}{2}(x - u(x)) + \frac{1}{2}(x + u(x))$,

$$\frac{1}{2}(x - u(x)) \in \ker(u + Id), \frac{1}{2}(x + u(x)) \in \ker(u - Id).$$

Si $y \in \ker(u - Id) \cap \ker(u + Id)$ alors $u(y) = y = -y$ donc $y = 0$. On a montré que

$$\mathbb{C}^n = \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id).$$

Soit B_- une base de $\ker(u - Id)$ et B_+ une base de $\ker(u + Id)$, dans la base $B_- \cup B_+$ de $\mathbb{C}^n$, u admet une matrice diagonale. Donc U est diagonalisable. Comme $B_n^2 = I_n$, B_n est diagonalisable.



7. $v(e_1) = e_1$,

pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$ $v(e_{i+2} + e_{n-i}) = e_{i+2} + e_{n-i}$ et

$v(e_{i+2} - e_{n-i}) = -e_{i+2} + e_{n-i}$. Les vecteurs $e_1, (e_{i+2} - e_{n-i})_{i \in \{0, \dots, p\}}$ et $(e_{i+2} + e_{n-i})_{i \in \{0, \dots, p\}}$ forment une base de $\mathbb{C}^n$. Donc 1 est valeur d'ordre $p+1$ de base de vecteur propre $(e_{i+2} + e_{n-i})_{i \in \{0, \dots, p\}} \cap (e_1)$ et -1 est valeur propre d'ordre p de base de vecteur propre $(e_{i+2} - e_{n-i})_{i \in \{0, \dots, p\}}$.

Le polynôme caractéristique de B_n est $\det(B_n - X Id) = -(X+1)^p (X-1)^{p+1}$.

8. $Q(X)$ et $(X - a_1)$ sont premiers entre eux car $a_i \neq a_1$ pour $i > 1$. Le théorème de Bezout prouve qu'il existe deux polynômes R et S tels que

$$R(X)Q(X) + S(X)(X - a_1) = 1.$$

Soit $x \in E$,

$$x = R(w)Q(w)x + S(w)(w - a_1)x$$

avec $R(w)Q(w)x \in \ker(w - a_1)$ et $S(w)(w - a_1)x \in \ker Q(w)$.

Soit $y \in \ker(w - a_1 Id) \cap \ker Q(w)$ alors $y = R(w)Q(w)y + S(w)(w - a_1)y = 0$. Donc

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété "Pour tout espace vectoriel F de dimension n sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme v de F , et tout polynôme à racines simples de la forme $P(X) = \prod_{i=1}^{d_p} (X - a_i)$ vérifiant $P(v) = 0$, alors

$$F = \ker(v - a_1 Id) \oplus \ker(v - a_2 Id) \oplus \dots \oplus \ker(v - a_{d_p} Id)."$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vrai. On suppose que les propriétés $\mathcal{P}_j$ pour $j < n$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit w un endomorphisme tel que $P(w) = 0$ avec $P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_d)$ sur E un espace vectoriel de dimension n . D'après le début de la question,

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$

Si $\ker(w - a_1 Id) = \{0\}$ alors $Q(w) = 0$ et on ré-applique la même propriété jusqu'à obtenir l'existence d'un j tel que

$E = \ker(w - a_j Id) \oplus \ker Q'(w)$ avec $\ker(w - a_j Id) \neq \{0\}$ pour $i < j$ $\ker(w - a_i Id) = \{0\}$ et $Q' = (X - a_{j+1}) \cdots (X - a_d)$. L'application $w' = w|_{\ker Q'(w)}$ est un endomorphisme de $\ker Q'(w)$, $Q'(w') = 0$. $\ker Q'(w)$ est de dimension strictement inférieure à n . En appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\ker Q'(w) = \ker(w' - a_{j+1} Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w' - a_d Id).$$

Pour $k > j$ $\ker(w - a_k Id) \subset \ker(Q'(w))$ donc $\ker(w - a_k Id) = \ker(w' - a_k Id)$. Finalement

$$\ker Q'(w) = \ker(w - a_{j+1} Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id),$$

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id).$$

En prenant une base appropriée à cette décomposition on montre que w est diagonalisable.



9. A_n est solution de l'équation $A_n^4 - n^2 I_n = 0$.

Soit $P(X) = (X + \sqrt{n})(X - \sqrt{n})(X + i\sqrt{n})(X - i\sqrt{n})$ on a $P(A_n) = 0$. Le résultat de la question précédente montre que A_n est diagonalisable de valeurs propres λ_k appartenant à l'ensemble $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$

10. La matrice D_n^2 est équivalente à la matrice A_n^2 . Donc n est valeur propre de A_n^2 d'ordre $a + b$ et $-n$ est valeur propre d'ordre $c + d$. D'après la question 7, $a + b = p + 1$ et $c + d = p$.

11. Soit ϕ' de $T \times T$ sur $T \times T$ définie par $\phi'(u, v) = (u + v, v)$ si $u + v < n$ $\phi(u, v) = (u + v - n, v)$ si $u + v \geq n$. On a $\phi\phi' = Id$ donc ϕ est une bijection. Notons $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et en utilisant $\alpha_n^n = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} G_n \overline{G}_n &= \sum_{r \in T} \alpha_n^{r^2} \sum_{s \in T} \alpha_n^{-s^2} \\ &= \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{r^2 - s^2} = \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{\phi_1(r,s)^2 - \phi_2(r,s)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

On a $\alpha_n^n = 1$ donc $G_n \overline{G}_n = \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{(r-s)^2 - s^2}$.

$$G_n \overline{G}_n = \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{r^2 - 2sr} = \sum_{r \in T} \alpha_n^{r^2} \sum_{s \in T} \alpha_n^{-2sr} = \sum_{r \in T} \alpha_n^{r^2} H_{-2r} \quad (2)$$

En utilisant le fait que H_{-2r} est non nul et vaut n si et seulement si n divise $2r$, donc si est seulement si n divise r (car n est impair), soit encore si et seulement si $r = 0$ (car $r \in T$). Finalement

$$G_n \overline{G}_n = \sum_{(r,s) \in T^2} \alpha_n^{r^2 - 2sr} = \sum_{r \in T} \alpha_n^{r^2} H_{-2r} = \alpha_n^0 n = n \quad (3)$$

Finalement $|G_n| = \sqrt{n}$.

12. $|\text{Tr} A_n| = |a\sqrt{n} - b\sqrt{n} + ic\sqrt{n} - id\sqrt{n}| = n$.



Donc $(a - b)^2 + (c - d)^2 = 1$.

13. On suppose que $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. A_n est une matrice circulaire donc

$$\begin{aligned} \det A_n &= \prod_{(i,j) \in T^2, i < j} (\alpha_n^i - \alpha_n^j) = \prod_{(i,j) \in T^2, i < j} \alpha_n^i (1 - \alpha_n^{j-i}) \\ &= i^{2(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \alpha_n^{-k})^{n-k} \\ &= i^{2(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \alpha_n^{n-k})^{n-k} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\det A_n)^2 &= i^{4(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \alpha_n^k)^k \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \alpha_n^{-k})^{n-k} \\ &= i^{4(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \alpha_n^{-k})^n \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1 - \alpha_n^{-k}}{1 - \alpha_n^k} \right)^k \\ &= i^{4(n-1)} n^n \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1 - \alpha_n^{-k}}{1 - \alpha_n^k} \right)^k = i^{2p(2p+1)} n^n \end{aligned} \quad (5)$$

Donc $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = i^{p(2p+1)} n^{\frac{n}{2}}$. On en déduit

$\det(A_n) = i^{c+d+2b+2d} (\sqrt{n})^n = i^{p(2p+1)} n^{\frac{n}{2}}$, donc il existe $m' \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p + 2b + 2d = p(2p + 1) + 4m'.$$

En simplifiant on trouve $b + d = p^2 + 2m'$. Comme $p^2 - p$ est divisible par deux il existe $m'' \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 = p + 2m''$ et on trouve $b + d = p + 2(m' + m'')$.

Comme $(a - b)^2 + (c - d)^2 = 1$ et $a - b$ et $c - d$ sont des entiers, les valeurs de a b c et d vérifient l'un des quatre cas suivants $a = b$ et $c = d + 1$, $a = b$ et $c + 1 = d$, $a = b + 1$ et $c = d$, $a + 1 = b$ et $c = d$.

Ces quatre cas s'écrivent

$$a = b = \frac{p+1}{2}, d = \frac{p-1}{2}, c = \frac{p+1}{2}$$

$$a = b = \frac{p+1}{2}, c = \frac{p-1}{2}, d = \frac{p+1}{2}$$

$$a = 1 + \frac{p}{2}, b = \frac{p}{2}, c = \frac{p}{2}, d = \frac{p}{2}$$

$$a = \frac{p}{2}, b = 1 + \frac{p}{2}, c = \frac{p}{2}, d = \frac{p}{2}$$

La condition $b + d = p[2]$ exclut le deuxième et le quatrième cas.

Les coefficients a, b, c, d sont des entiers,

si p est pair $a = 1 + \frac{p}{2}$ $b = \frac{p}{2}$ $c = \frac{p}{2}$ $d = \frac{p}{2}$ et

si p est impair $a = b = \frac{p+1}{2}$ $d = \frac{p-1}{2}$ $c = \frac{p+1}{2}$.



14. $\text{Tr}A_n = \sqrt{n}(a - b + ic - id).$

Si p est pair $\text{Tr}A_n = \sqrt{n}$, si p est impair $\text{Tr}A_n = i\sqrt{n}$.