

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Soit n un entier naturel non nul. On pose $\alpha_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{(k^2)}$.



1. Calculer G_1, G_2, G_3, G_4 . Calculer pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $H_r = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^{kr}$.
2. Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, le polynôme $X^5 - 1$.
3. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ en fonction de $\sqrt{5}$. Calculer G_5 .
4. On considère la matrice $A_n \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \\ 1 & \alpha_n^2 & (\alpha_n^2)^2 & \cdots & (\alpha_n^2)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n^{n-1} & (\alpha_n^{n-1})^2 & \cdots & (\alpha_n^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\text{Tr} A_n = G_n$ (Tr désigne la trace de la matrice) et que $A_n^2 = nB_n$ avec $B_n = (b_s^r)$ définie par $b_s^r = 1$ si $r + s = 2$ ou $r + s = n + 2$, sinon $b_s^r = 0$. Montrer que $B_n^2 = I_n$.

5. Montrer que si λ est valeur propre de A_n alors λ^p est une valeur propre de A^p , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A_n admet au plus quatre valeurs propres distinctes. Indiquer leurs valeurs possibles.

6. Soit $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que $U^2 = I_n$. Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant U pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ établir

$$\mathbb{C}^n = \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id).$$

En déduire que U est diagonalisable. Montrer que B_n est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$). Si v est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ ayant pour matrice B_n dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, déterminer en fonction des vecteurs e_i une base de vecteurs propres de v et montrer que 1 et -1 sont respectivement valeurs propres de B_n d'ordre, respectivement, $p+1$ et p . Quel est le polynôme caractéristique de B_n ?
8. Soit P un polynôme de degré d de la forme $P(X) = (X-a_1)(X-a_2) \cdots (X-a_d)$ avec pour tout $i \neq j$, $a_i \neq a_j$. Notons Q le polynôme tel que $P(X) = (X-a_1)Q(X)$. Montrer que $Q(X)$ et $(X-a_1)$ sont premiers entre eux. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit w un endomorphisme de E tel que $P(w) = 0$. Montrer que

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker Q(w).$$



En déduire que

$$E = \ker(w - a_1 Id) \oplus \ker(w - a_2 Id) \oplus \cdots \oplus \ker(w - a_d Id).$$

En déduire que w est diagonalisable.

9. Montrer que A_n est semblable à une matrice diagonale du type

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_k \in \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

10. On suppose que $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On désigne par a, b, c, d le nombre de fois où les quatre valeurs $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$ sont respectivement écrites dans la matrice D_n . Montrer que $a + b = p + 1$ et $c + d = p$.
11. Soit $T = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Montrer que l'on définit une bijection ϕ de $T \times T$ sur $T \times T$ par $\phi(k, s) = (k - s, s)$ si $k \geq s$ et $\phi(k, s) = (k + n - s, s)$ si $k < s$. En déduire que $G_n \overline{G}_n = \sum_{(r,s) \in T \times T} \alpha_n^{(r+s)^2 - s^2}$. Prouver que si n est impair alors $|G_n| = \sqrt{n}$.
12. En déduire que les coefficients de la question 8) vérifient $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$ si n est impair.

13. On suppose que $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Montrer en calculant $\det A_n$ que $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = i^{p(2p+1)} n^{\frac{n}{2}}$.
14. On suppose que $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Dédire de la question précédente qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $b + d = p + 2m$. Calculer les valeurs de a, b, c, d .
15. En déduire la valeur de $\text{Tr} A_n$ pour n impair.