

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

I. Soit $X = (x, y) \in M_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, le calcul donne

$${}^tXAX = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

En particulier si b est définie positive alors pour tout $x \neq 0$ on a $\alpha x^2 > 0$ donc $\alpha > 0$. On trouve

$${}^tXAX = \alpha(x + \frac{\beta}{\alpha}y)^2 + (\gamma - (\frac{\beta}{\alpha})^2)y^2. \quad (1)$$

Cette quantité (définie pour α non nul) est positive pour tout couple de x, y non nul si et seulement si $\alpha > 0$ et $(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}) > 0$ donc si et seulement si $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$. Donc on a montré que si b est positive alors $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$. Inversement si $\alpha > 0$ et $\gamma\alpha - \beta^2 > 0$ alors on utilise l'expression (1) et on a montré que b est positive.

II.



1. Le vecteur $w = (\alpha, \alpha, -1)$ est orthogonal aux deux vecteurs u_α et v_α et une équation cartésienne du plan P_α est :
un point de coordonnées (x, y, z) appartient à ce plan si et seulement si $\alpha x + \alpha y - z = 0$.
2. Soit $(x, y, z) \in P_\alpha$ alors $z = \alpha(x + y)$

$$b_\alpha((x, y, z), (x, y, z)) = x^2 + y^2 - \alpha^2(x + y)^2.$$

b_α est positive si et seulement si pour tout $(x, y) \neq 0$ alors $x^2 + y^2 - \alpha^2(x + y)^2 > 0$. D'après la question I on trouve b_α est positive si et seulement si $(1 - \alpha^2) > 0$ et $(1 - \alpha^2)^2 - \alpha^4 > 0$. Donc si et seulement si $|\alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Pour premier vecteur on choisit

$$e_1 = \frac{u_\alpha}{b(u_\alpha, u_\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, 0, \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right).$$

Le deuxième vecteur est

$$e_2 = \left(\frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}, \frac{1}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)}, \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)(2\alpha^4 + 1 - 3\alpha^2)} \right).$$

4. Soit f de matrice associée A . Soit $\tilde{B}$ la matrice associée à B on a

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$B(f(x, y, z), f(x', y', z')) = {}^t(x, y, z) {}^tA\tilde{B}A(x', y', z')$$

L'application f vérifie la propriété voulue si et seulement si

$${}^tA\tilde{B}A = \tilde{B}.$$

III.

1. q change de signe si et seulement si q n'est pas positive et $-q$ n'est pas positive. D'après la question I, si on note

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !

une matrice de f , la fonction q change de signe si et seulement si $\alpha\beta - \gamma^2 < 0$. Comme $\det f = \alpha\beta - \gamma^2$, q change de signe si et seulement si $\det f < 0$.

2. Supposons que Z_q est un sous-espace vectoriel et que q change de signe. Donc il existe u et v tels que $q(u) < 0$ et $q(v) > 0$. Alors u et v sont linéairement indépendants et forment une base de E . l'application $\alpha \rightarrow h(\alpha) = q(u + \alpha v)$ est continue, $h(0) < 0$ et $\lim_{h \rightarrow \infty} h(\alpha) = \infty$. Donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $q(u + \alpha_0 v) = 0$. l'application $\alpha \rightarrow g(\alpha) = q(u - \alpha v)$ est continue, $g(0) < 0$ et $\lim_{h \rightarrow \infty} g(\alpha) = \infty$. Donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $q(u - \alpha_1 v) = 0$. Les vecteurs $u + \alpha_0 v$ et $u - \alpha_1 v$ forment une base de E , et appartiennent à Z_q donc $Z_q = E$, et $q = 0$. Ceci contredit le fait que q change de signe. Supposons que q ne change pas de signe, sans perte de généralité supposons que q est positive, montrons que Z_q est un espace vectoriel. Notons

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} \langle f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \langle f(y), x \rangle.$$

Comme f est autoadjoint $Q(x, y) = \langle f(x), y \rangle$. Pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $q(x + \alpha y) \geq 0$. Comme

$$q(x + \alpha y) = q(x) + 2\alpha Q(x, y) + q(y),$$

on a la relation $|Q(x, y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$. Soit $x \in Z_q$ alors on obtient pour tout $y \in E$, $Q(x, y) = 0$. Donc $x \in \text{Ker} f$. Inversement si $x \in \text{Ker} f$ alors $q(x) = 0$. Donc $Z_q = \text{Ker} f$, et Z_q est un espace vectoriel.

3. Si q ne change pas de signe sur E , d'après la question précédente $Z_q = \text{Ker } f$ donc $\dim Z_q = 2 - \text{rang } f$.
4. La réponse est non. Prenons par exemple la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det C = 1$ et la forme quadratique associée à C change de signe. i.e. $C((x, y, z), (x, y, z)) = x^2 - y^2 - z^2$.



IV.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement si $a + d = 0$.
Donc finalement $F = \{ae_1 + be_2 + ce_3, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ de base (e_1, e_2, e_3) .
2. Le crochet est symétrique $\text{Tr}^t AB = \text{Tr}^t BA$, bilinéaire, positive $\text{Tr}^t AA = \sum_i \sum_j a_{i,j}^2$ si $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$. Et $\text{Tr}^t AA = 0$ implique $A = 0$.
3. Le projeté orthogonal de A sur F est $A - P'(A)$ si $P'(A)$ désigne le projeté orthogonal sur l'orthogonal de F . L'orthogonal de F est l'espace engendré par Id , et le projeté $P'(A)$ est $1/2 \text{Tr}(A) \text{Id}$. Le projeté orthogonal de A sur F est $A - 1/2(\text{Tr} A) \text{Id}$.
4. On trouve $f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $f_2 = e_2$ et $f_3 = e_3$.
5. La forme quadratique $\det A$ définit une unique forme bilinéaire symétrique $q(A, B) = \frac{\det(A+B) - \det(A-B)}{4}$ telle que $q(A, A) = \det A$ qui définit une unique forme linéaire autoadjoint u par $q(A, B) = \langle u(A), B \rangle$.
6. La matrice est donnée par les éléments

$$u = \begin{pmatrix} \det f_1 & q(f_1, f_2) & q(f_1, f_3) \\ q(f_2, f_1) & \det f_2 & q(f_2, f_3) \\ q(f_3, f_1) & q(f_3, f_2) & \det f_3 \end{pmatrix}.$$

On trouve $u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de u sont $-\frac{1}{2}$

et $\frac{1}{2}$ (valeur propre double) et la signature de la forme quadratique $A \in E \mapsto \det(A)$ est $(2, 1)$.

V.

1. La forme bilinéaire associée est $q(A, B) = \text{Tr} AB$.

2. Si A est symétrique et B est antisymétrique alors

$$\text{Tr } AB = \text{Tr } {}^t(AB) = -\text{Tr } BA = -\text{Tr } AB = 0$$

3. L'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q contient les matrices antisymétriques. Soit $A = S + S'$ une matrice dans l'orthogonal des matrices symétriques, avec S symétrique et S' antisymétrique (une telle décomposition existe).

$$0 = \text{Tr } AS = \text{Tr } SS + \text{Tr } S'S = \text{Tr } SS = 0$$

Comme S est symétrique $\text{Tr } {}^tSS = \text{Tr } SS = 0$ et, d'après la section V, $S = 0$. Donc A est antisymétrique. L'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q est l'ensemble des matrices antisymétriques.

4. Les matrices suivantes forment une base de G

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette base q a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La signature de q est $(3, 1)$.