ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA-ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

I. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Montrer que b est définie positive si et seulement si $\{\alpha > 0 \text{ et } \alpha\gamma - \beta^2 > 0\}$. *On rappelle que b est définie positive si et seulement si elle définit un produit scalaire* c'est à dire si $\forall u \in E - \{0\},\ b(u,u) > 0$ *ou si et seulement si*

$$\forall X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\ \ {}^tXAX > 0.$$

${}^tX$ désigne la transposée de X.

II. On considère désormais l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et la forme bilinéaire symétrique

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

définie par

$$B\left((x,y,z);(x',y',z')\right) = xx' + yy' - zz'.$$

Soit α un paramètre réel. On considère le plan P_α engendré par les vecteurs $u_\alpha = (1, 0, \alpha)$ et $v_\alpha = (0, 1, \alpha)$:

$$P_\alpha = \{\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Donner une équation cartésienne du plan P_α.
   On considère maintenant la restriction de B au plan P_α que l'on appelle b_α : si $U, V \in P_\alpha$, on a donc $b_\alpha(U,V) = B(U,V)$.

2. A quelle condition sur le paramètre α, la forme bilinéaire symétrique b_α est elle définie positive?

3. Dans ce cas, grâce au procédé de Gramm-Schmidt, donner une base orthonormale de l'espace euclidien (P_α, b_α).

4. Ecrire la relation que doit vérifier la matrice A dans la base canonique d'une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$B(f(x,y,z), f(x',y',z')) = B((x,y,z),(x',y',z'))$$

pour tout $(x,y,z); (x',y',z')$.

III. On suppose maintenant E (de dimension deux) muni d'un produit scalaire, que l'on notera, pour deux vecteurs $u, v \in E$: $\langle u, v\rangle$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E, on définit alors une forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $q(u) = \langle f(u), u\rangle$.

1. Montrer que q change de signe sur E (à savoir qu'il existe $u, v \in E$ tels que $q(u)q(v) < 0$) si et seulement si $\det f < 0$.

2. Montrer que q ne change pas de signe sur E si et seulement si l'ensemble $Z_q = \{x \in E,\ q(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Si q ne change pas de signe sur E, discuter alors en fonction de la dimension de Z_q le rang de f.

4. Peut-on généraliser la question 1. au sens suivant : Sur un espace F de dimension $n > 2$, a-t-on
"q change de signe si et seulement si $\det f < 0$"?

IV. On considère ici l'espace

$$F = \{A \in M_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\, A = 0\}.$$

Tr A désigne la trace de la matrice A.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et vérifier que

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

en est une base.

2. Montrer que si on définit $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\, {}^t AB$, alors $(M_2(\mathbb{R}), \langle.,.\rangle)$ est un espace euclidien.

3. Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ exprimer le projeté orthogonal de A sur F.

4. Trouver une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de $(F, \langle.,.\rangle)$ en orthonormalisant la base (e_1, e_2, e_3).

5. L'application $A \to \det(A)$ est une forme quadratique sur F, montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint u de E tel que

$$\forall A \in E,\ \det(A) = \langle u(A), A\rangle.$$

6. Déterminer la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) et déterminer les valeurs propres de u et la signature de la forme quadratique $A \in F \to \det(A)$.

V. On considère $G = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si on définit pour $A \in G$, $q(A) = \operatorname{Tr} A^2$, alors q est une forme quadratique sur E. Quelle est la forme bilinéaire associée?
2. Montrer que si A est symétrique et B est antisymétrique alors

$$\operatorname{Tr} AB = 0.$$

3. Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q.
4. Déterminer la signature de q pour $n = 2$.