AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice :

1. Déterminons le rang de (u,v,w) : $\left|\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 0 & :u \\ 0 & -1 & 2 & :w \\ 1 & 0 & 1 & :v \end{array}\right.\left|\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 0 & :u \\ 0 & -1 & 2 & :w \\ 0 & 0 & -1 & :v-u-w \end{array}\right.$.

   Le rang de (u,v,w) est 3, donc (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $f(u) = u$, $f(v) = 8u - 6v + 4w$, et $f(w) = 16u - 16v + 11w$; la matrice de f dans la base $\mathcal{B}^\star = (u,v,w)$ est donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 0 & -6 & -16 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda - \frac{5-\sqrt{33}}{2})(\lambda - \frac{5+\sqrt{33}}{2})$. Il a donc 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$. En effectuant la division Euclidienne de X^n par $\mathcal{P}(X)$, on obtient

$$X^n \quad = \quad \mathcal{P}(X)Q(X) + R(X), \tag{1}$$

   où $R(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur au degré du polynôme $\mathcal{P}$ c'est à dire de degré strictement inférieur à 3. Notons a, b, c les coefficients réels de $R(X)$ i.e. $R(X) = aX^2 + bX + c$.

   D'après le Théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de la matrice A. En remplaçant X par A dans (1), on obtient

$$A^n \quad = \quad R(A) = aA^2 + bA + c = a\begin{pmatrix} 7 & -6 & -11 \\ 0 & 1 & 4 \\ -10 & 10 & 22 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + c.$$

   Déterminer A^n revient alors à déterminer les réels a, b et c. Les valeurs propres annulant le polynôme caractéristique, il vient que a, b et c sont les solutions du système à trois équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & a+b+c \\ \lambda_2^n & = & a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c \\ \lambda_3^n & = & a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{-\lambda_2+\lambda_2^n+\lambda_3-\lambda_2^n\lambda_3-\lambda_3^n+\lambda_2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(-1+\lambda_3)} \\ b & = & \frac{\lambda_2^2-\lambda_2^n-\lambda_3^2+\lambda_2^n\lambda_3^2+\lambda_3^n-\lambda_2^2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_2)(-1+\lambda_3)(-\lambda_2+\lambda_3)} \\ c & = & \frac{\lambda_2^2\lambda_3-\lambda_2^n\lambda_3-\lambda_2\lambda_3^2+\lambda_2^n\lambda_3^2+\lambda_2\lambda_3^n-\lambda_2^2\lambda_3^n}{(-1+\lambda_3)(-\lambda_2+\lambda_2^2+\lambda_3-\lambda_2\lambda_3)} \end{array}\right.$

Problème : Soient N et M deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit p un réel de $]0,1[$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1,\ 0 \leq y \leq M-1\} \\
F_1 &= \{(x,M) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x \leq N-1\} \\
F_2 &= \{(N,y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq y \leq M-1\} \\
F &= F_1 \cup F_2 \cup \{(N,M)\} \\
\overline{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \cup F
\end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (l,k) \in \mathcal{R},\ f(l,k) = pf(l+1,k) + (1-p)f(l,k+1). \tag{2}$$

I. Résultat préliminaire et Matrices Nilpotentes.

A. Résultat préliminaire

Résultat : Soient r et s deux entiers donnés ($r \geq 1$ et $s \geq 0$), il existe un unique couple de polynômes (U,V) de l'indéterminée x vérifiant les propriétés suivantes:

i)Le polynôme U est de degré strictement inférieur à r

ii) U et V satisfont la relation $(1-x)^{s+1}U + x^r V = 1$.

De plus les polynômes U et V sont définis par

$$U = \sum_{l=s}^{s+r-1} C_l^s x^{l-s} = \sum_{l=0}^{r-1} C_{l+s}^s x^l \tag{3}$$

$$V = \sum_{l=0}^{s} C_{r-1+l}^{r-1} (1-x)^l \tag{4}$$

B. Matrices Nilpotentes.

1. Soit λ une valeur propre de A et soit u un vecteur propre associé à λ, alors on a

$$A.u = \lambda u \ \Rightarrow\ A^r.u = \lambda^r u, \text{ comme } A^r = 0 \text{ on obtient } \lambda = 0.$$

Par définition $\mathcal{P}_A$, le polynôme caractéristique de A s'écrit $\mathcal{P}_A(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - x)^{\alpha_i}$, si $(\lambda_i)_{\{1 \leq i \leq p\}}$ désigne l'ensemble des valeurs propres distinctes de A et α_i désigne l'ordre de multipicité de λ_i.
Ici toutes les valeurs de A étant nulles, on a $\mathcal{P}_A(x) = (-1)^d x^d$.
A annulant son polynôme caractéristique, on a $\mathcal{P}_A(A) = 0$, ce qui signifie que $A^d = 0$; comme r est l'ordre de nilpotence de A, on a $r \leq d$.

2. Comme $A^r = 0$, $b = (I_d, A, A^2, \dots, A^{r-1})$ est un système générateur de $\{A^k,\ k \geq 0\}$.

Montrons que $b = (I_d, A, A^2, \dots, A^{r-1})$ est libre. Si $\sum_{n=0}^{r-1} \mu_n A^n = 0$. On note $P = \{n \in \mathbb{N}\ :\ 0 \leq n < r\ :\ \mu_n \neq 0\}$ et on suppose que $P \neq \emptyset$. Soit $n_0 = \inf P$, en multipliant les deux membres de l'égalité $\sum_{n=0}^{r-1} \mu_n A^n = 0$ par A^{r-1-n_0}, on obtiendrait que $\mu_{n_0} A^{r-1} = 0$ ce qui est impossible.

3. Soit s un entier naturel.

a. $(I_d - A)^{s+1} = \sum_{n=0}^{s+1} C_{s+1}^n (-1)^n A^n = \sum_{n=0}^{min(s+1,r-1)} C_{s+1}^n (-1)^n A^n$. On a alors que $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$ et ses coordonnées dans la base b sont $(C_{s+1}^n (-1)^n)_{\{0 \leq n \leq min(s+1,r-1)\}}$.

b. Le résultat préliminaire appliqué à l'indéterminée A assure l'existence et l'unicité d'un couple de polynômes (U, V) tels que

$$(I_d - A)^{s+1} U + A^r V = I_d \quad \Rightarrow \quad (I_d - A)^{s+1} U = I_d.$$

Cela implique que $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible d'inverse $U(A) = \sum_{k=0}^{r-1} C_{k+s}^s A^k$.

4. **Exemple. a.** Pour $k = 2$, on a que

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, d\}^2,\ J_d^2(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut montrer par récurrence que pour $k \geq 2$

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, d\}^2,\ J_d^k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $j - i \leq d - 1$ par conséquent dès que $k \geq d$, la matrice J_d^k est nulle. L'ordre de nilpotence de la matrice J_d est d.

b. D'après la question I.**B.**3, pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)} = \sum_{k=0}^{d-1} C_{k+s}^s \lambda^k J_d^k$.

En utilisant l'expression des matrices J_d^k, pour $0 \leq k \leq d-1$, les éléments de la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$ sont

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, d\}^2,\ (I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}(i,j) = \begin{cases} C_{k+s}^s \lambda^k & \text{si} \quad j - i = k,\ 0 \leq k \leq d-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II. Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (2).

A. Etude de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\overline{\mathcal{R}}$ vérifiant (2).

1. $\mathcal{E}$ est non vide car l'application nulle appartient à $\mathcal{E}$. On vérifie facilement que $\forall(f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $\forall(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2$, $\mu f + \nu g \in \mathcal{E}$.
2. **a.** Le terme général de $C_k(f)$ est le réel $f(l,k)$ $(0 \leq l \leq N)$, qui est déterminé de manière unique par $f(l+1,k)$ et $f(l,k+1)$ (Equation (2)). Or $f(l,k+1)$ appartient à la matrice $C_{k+1}(f)$. Donc $f(N,k)$ et $C_{k+1}(f)$ déterminent $f(N-1,k)$, puis successivement $f(N-2,k), f(N-3,k), \ldots, f(0,k)$ de manière unique.

   b. Tout élément f de $\mathcal{E}$ est par conséquent déterminé de manière unique par la dernière colonne $C_M(f)$ de la matrice $M(f)$ et par les éléments $\{f(N,k),\ 0 \leq k \leq M-1\}$ donc par les ensembles $\{f(l,M); 0 \leq l \leq N\}$ et $\{f(N,k); 0 \leq k \leq M-1\}$.

3. Tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par sa restriction à l'ensemble F donc par les éléments $\{f(N,k) = \mu_k,\ 0 \leq k \leq M-1\}$, $\{f(l,M) = \eta_l,\ 0 \leq l \leq N-1\}$ et $f(N,M) = \nu$. Les fonctions f de $\mathcal{E}$ et $\sum_{l=0}^{N-1} \eta_l\phi_l + \nu\xi + \sum_{k=0}^{M-1} \mu_k\psi_k$ coincident alors sur F donc sur $\overline{\mathcal{R}}$. $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{N-1}, \xi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{M-1}\}$ engendre $\mathcal{E}$. Montrons que c'est un système libre. Si $\sum_{l=0}^{N-1} \eta_l\phi_l + \nu\xi + \sum_{k=0}^{M-1} \mu_k\psi_k = 0$, la valeur de la fonction en (l,M), $\quad (0 \leq l \leq N-1)$ est égale à η_l, donc $\eta_l = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1)$, de même pour $\mu_k = 0 \quad (0 \leq k \leq M-1)$ et $\nu = 0$ en utilisant les valeurs en (N,k) pour $0 \leq k \leq M-1$ et en (N,M).
4. On a $C_M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ et $L_N(\xi) = (0, 0, \ldots, 1)$.

$$\xi(l,M) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1), \quad \xi(N,M) = 1, \quad \xi(N,k) = 0 \quad (0 \leq k \leq M-1).$$

   Or ξ vérifie l'équation (2), on en déduit que $\xi(N-1,M-1) = p\xi(N,M-1) + (1-p)\xi(N-1,M) = 0$, donc $\xi(l,M-1) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1)$, et de proche en proche $\xi(l,k) = 0 \quad (0 \leq l \leq N-1,\ 0 \leq k \leq M-1)$. $M(\xi)$ est donc une matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme $\xi(N,M) = 1$.

B. Calcul des fonctions ϕ_i et ψ_j.

1. On note $C_k(\phi_i)(h)$ la h-ième composante de la matrice colonne $C_k(\phi_i)$ $(0 \leq h \leq N+1)$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k < M$ et pour tout entier l tel que $0 \leq l \leq N$, la matrice $(I_{N+1} - pJ_{N+1})C_k(\phi_i)$ est une matrice colonne à $(N+1)$ lignes dont le terme général

$$\begin{aligned}
\tau_l &= \sum_{h=0}^{N} (I_{N+1}(l,h) - pJ_{N+1}(l,h))C_k(\phi_i)(h) \\
&= C_k(\phi_i)(l) - pC_k(\phi_i)(l+1) \\
&= \phi_i(l-1,k) - p\phi_i(l,k) \\
&= (1-p)\phi_i(l,k+1) \text{ d'après l'équation (2).}
\end{aligned}$$

τ_l est donc la terme général de $(1-p)C_{k+1}(\phi_i)$.
Un calcul analogue donne $pL_{l+1}(\psi_j) = L_l(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)$.

2. Le terme général de $C_M(\phi_i)$ est $\phi_i(l, M)$ égal à 1 si $i = l$ et 0 sinon, pour tout l tel que $0 \leq l \leq N$. D'après la question précédente, on a $C_k(\phi_i) = (1-p)\ \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-1}\ \ C_{k+1}(\phi_i)$. En itérant la formule, on obtient $C_k(\phi_i) = (1-p)^{M-k}(I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}\ \ C_M(\phi_i)$. Le terme général de $C_k(\phi_i)$ s'écrit

$$
\begin{aligned}
\phi_i(l,k) &= (1-p)^{M-k} \sum_{h=0}^{N} \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}(l,h)\ \ \phi_i(h,M) \\
&= (1-p)^{M-k}\ \ (I_{N+1} - pJ_{N+1})^{-(M-k)}(l,i) \\
&= (1-p)^{M-k}(\sum_{h=0}^{N}\ \ C_{M-k-1+h}^{M-k-1}\ \ p^h\ J_{N+1}^h(l,i))
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\phi_i(l,k) = \begin{cases} (1-p)^{M-k} C_{M-k-1+h}^{M-k-1}\ \ p^h & \text{si } i-l=h \text{ et } h \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
$$

Le terme général de $L_N(\psi_j)$ est $\psi_j(N,k)$ égal à 1 si $k = j$ et 0 sinon, pour tout k tel que $0 \leq k \leq M$. D'après la question précédente, on a $L_l(\psi_j) = pL_{l+1}(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-1}$. En itérant la formule, on obtient $L_l(\psi_j) = p^{N-l} L_N(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}$. Le terme général de $L_l(\psi_j)$(matrice ligne) s'écrit

$$
\begin{aligned}
\psi_j(l,k) &= p^{N-l} \sum_{h=0}^{M} \psi_j(N,h)\ (I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}(h,k) \\
&= p^{N-l}\ \ (I_{M+1} - (1-p)(J_{M+1})^t)^{-(N-l)}(j,k) \\
&= p^{N-l} \ \sum_{h=0}^{N}\ \ C_{N-l-1+h}^{N-l-1}\ \ (1-p)^h\ \ ((J_{M+1})^t)^h(j,k).
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\psi_j(l,k) = \begin{cases} p^{N-l}\ C_{N-l-1+h}^{N-l-1}\ (1-p)^h & \text{si } j-k=h \text{ et } h \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
$$