ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On considère les vecteurs $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 + e_3$ et $w = -e_2 + 2e_3$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base.

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Problème

Soient N et M deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit p un réel de $]0, 1[$. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$ suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le x \le N-1,\ 0 \le y \le M-1\} \\
F_1 &= \{(x, M) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le x \le N-1\} \\
F_2 &= \{(N, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le y \le M-1\} \\
F &= F_1 \cup F_2 \cup \{(N, M)\} \\
\overline{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \cup F
\end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (l, k) \in \mathcal{R},\ f(l, k) = pf(l+1, k) + (1-p)f(l, k+1) \tag{1}$$

Après une étude préliminaire (partie I), nous recherchons (partie II) les éléments de $\mathcal{E}$.

Dans tout le problème, on notera $C_t^q = \frac{t!}{q!(t-q)!}$ le coefficient binomial de paramètres $t \in \mathbb{N}$ et $q \in \{0, \ldots, t\}$.

I. Résultat préliminaire et Matrices nilpotentes.

A. Résultat préliminaire (*ce résultat sera admis*)

Résultat : Soient r et s deux entiers donnés ($r \geq 1$ et $s \geq 0$), il existe un unique couple de polynômes (U, V) de l'indéterminée x vérifiant les propriétés suivantes:

i) Le polynôme U est de degré strictement inférieur à r.

ii) U et V satisfont la relation $(1-x)^{s+1}U + x^r V = 1$.

De plus les polynômes U et V sont définis par

$$U = \sum_{l=s}^{s+r-1} C_l^s x^{l-s} = \sum_{l=0}^{r-1} C_{l+s}^s x^l \tag{2}$$

$$V = \sum_{l=0}^{s} C_{r-1+l}^{r-1} (1-x)^l \tag{3}$$

B. Matrices nilpotentes.

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_d$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels, à d lignes et d colonnes. Si A est un élément de $\mathcal{M}_d$ et i, j deux entiers appartenant à $\{1, \ldots, d\}$, on note $A(i, j)$ le coefficient de la matrice A se situant sur la i-ième ligne et la j-ième colonne. On appelle I_d la matrice identité de $\mathcal{M}_d$. On pose

$$A^0 = I_d,\ A^1 = A, \text{ et pour tout entier } k \geq 2, A^k = AA^{k-1}.$$

Une matrice A de $\mathcal{M}_d$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$; le plus petit entier $r \geq 1$ vérifiant $A^r = 0$ est appelé *ordre de nilpotence* de A.

On suppose désormais que A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_d$ nilpotente d'ordre r ($r \geq 1$, r est donné).

1. Montrer que 0 est la seule valeur propre de la matrice A. Donner le polynôme caractéristique de A. En déduire que $r \leq d$.
2. On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d$ engendré par les matrices $\{A^k, k \geq 0\}$. Montrer que $b = (I_d, A, A^2, \ldots, A^{r-1})$ est une base de $e(A)$.
3. Soit s un entier naturel.

   a. Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$; donner ses coordonnées dans la base b.

   b. Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible et que sa matrice inverse notée $(I_d - A)^{-(s+1)}$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} C_{s+k}^s A^k$.

   Indication : on pourra utiliser le résultat préliminaire appliqué à l'indéterminée A.

4. **Exemple.** On appelle J_d la matrice de $\mathcal{M}_d$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,d\}^2,\ J_d(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j-i=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Pour $k \geq 2$, calculer la puissance k-ième de J_d. En déduire que J_d est une matrice nilpotente et préciser son ordre de nilpotence.

b. Pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, expliciter la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$, c'est-à-dire expliciter les éléments de la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$.

II. Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (1)

Si f est une fonction définie sur $\overline{\mathcal{R}}$, à valeurs réelles, on note $M(f)$ la matrice à $(N+1)$ lignes et $(M+1)$ colonnes définie par :

$$M(f) = \begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdot & \cdot & \cdot & f(0,M) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdot & \cdot & \cdot & f(1,M) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ f(N,0) & f(N,1) & \cdot & \cdot & \cdot & f(N,M) \end{pmatrix}$$

Pour k et l entiers vérifiant $0 \leq k \leq M$ et $0 \leq l \leq N$, on désigne par $C_k(f)$ la $(k+1)$-ième colonne de $M(f)$, c'est-à-dire $C_k(f) = \begin{pmatrix} f(0,k) \\ f(1,k) \\ . \\ . \\ . \\ f(N,k) \end{pmatrix}$ et par $L_l(f)$ la $(l+1)$-ième ligne de $M(f)$, c'est-à-dire $L_l(f) = (f(l,0), f(l,1), \ldots, f(l,M))$.

A. Etude de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f de $\overline{\mathcal{R}}$ vérifiant (1)

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\overline{\mathcal{R}}$ et à valeurs réelles.

2. **a.** Soit k un entier vérifiant $0 \leq k \leq M-1$. Si $f \in \mathcal{E}$, montrer que la matrice colonne $C_k(f)$ est déterminée de manière unique par la donnée de la matrice colonne $C_{k+1}(f)$ et du réel $f(N,k)$.

   b. En déduire que tout élément f de $\mathcal{E}$ est déterminé de manière unique par la donnée des ensembles $\{f(l,M); 0 \leq l \leq N\}$ et $\{f(N,k); 0 \leq k \leq M-1\}$.

   Remarque : cela signifie que $f \in \mathcal{E}$ est déterminée de manière unique par sa restriction à l'ensemble F.

Pour tout i vérifiant $0 \leq i < N$, on désigne par ϕ_i l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \phi_i(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (i,M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout j vérifiant $0 \leq j < M$, on désigne par ψ_j l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \psi_j(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (N,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin on note ξ l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \xi(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (l,k) = (N,M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{N-1}, \xi, \psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{M-1}\}$ est une base de $\mathcal{E}$.
4. Déterminer l'élément ξ de $\mathcal{E}$ en explicitant la matrice $M(\xi)$.
Indication : utiliser la question **II.A.**2.**b.** *pour expliciter la matrice $M(\xi)$.*

B. Calcul des fonctions ϕ_i et ψ_j.

1. En conservant les notations I_d et J_d de la partie **I.B.** pour $d = N+1$, respectivement pour $d = M+1$, montrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k < M$, respectivement pour tout entier l vérifiant $0 \leq l < N$, on a

$$\begin{aligned} (1-p)C_{k+1}(\phi_i) &= (I_{N+1} - pJ_{N+1})C_k(\phi_i) \\ pL_{l+1}(\psi_j) &= L_l(\psi_j)(I_{M+1} - (1-p)(J_{N+1})^t), \end{aligned}$$

où $(J_{N+1})^t$ désigne la transposée de la matrice J_{N+1}.

2. A l'aide de la question **I.B.**3., expliciter alors, pour tout élément $(l,k) \in \mathcal{R}$, les valeurs de $\phi_i(l,k)$ et $\psi_j(l,k)$.