

Avril 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

$\mathbb{N}_n$ désigne $\{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I



1. $\| \cdot \|_\infty$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|$$

montre que les ensembles $\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$ et $\{\|Ay\|, y \in S^{n-1}\}$ où $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{C}^n / \|y\| = 1\}$ est la sphère unité, sont égaux. Comme S^{n-1} est un compact de $\mathbb{C}^n$ et comme l'application $y \mapsto \|Ay\|$ est continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en un point z de S^{n-1} , autrement dit, il existe $z \in S^{n-1}$ tel que

$$\|Az\| = \max_{y \in S^{n-1}} \|Ay\| = \max_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right).$$

On constate que si $x \neq 0$,

$$\|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \|x\| \leq \|A\|_\infty \|x\|.$$

L'inégalité étant triviale pour $x = 0$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|Ax\| \leq \|A\|_\infty \|x\|.$$

On vérifie ensuite que $\| \cdot \|_\infty$ satisfait les trois axiomes d'une norme :

a) $\|A\|_\infty = 0 \implies \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|Ax\| = 0 \implies \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad Ax = 0 \implies A = 0$.

b) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

et en passant à la borne supérieure dans cette inégalité pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,
 $\|A + B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.

c) pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \neq 0$,

$$\frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

et en passant supérieure dans cette inégalité pour $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on obtient
 $\|\lambda A\|_\infty = |\lambda| \|A\|_\infty$.

2. $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \left(\max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right)$. Pour tout $x \in S^{n-1}$ et tout $i \in \mathbb{N}_n$

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{donc} \quad \|A\|_\infty \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

D'autre part, si $i_0 \in \mathbb{N}_n$ désigne l'indice tel que

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = \left(\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| \right),$$

posons $x = \left(\frac{\overline{a_{i_0 1}}}{|a_{i_0 1}|}, \dots, \frac{\overline{a_{i_0 n}}}{|a_{i_0 n}|} \right) \in S^{n-1}$ en prenant comme convention de remplacer $\frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|}$ par 0 si $a_{i_0 j} = 0$. Alors

$$\|A\|_\infty \geq \|Ax\| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right),$$

et l'on peut conclure à l'égalité demandée.

3. On utilise deux fois la propriété

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \|Ax\| \leq \|A\|_\infty \|x\|$$

qui provient directement, on l'a vu, de la définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On trouve

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|ABx\| \leq \|A\|_\infty \|Bx\| \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty \|x\|,$$

on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty,$$

et en passant au *sup* dans cette inégalité, $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Partie II

1. $|A + B| \leq |A| + |B|$, est triviale par l'inégalité triangulaire appliquée à chacun des coefficients. Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$ et $|A|.|B| = (d_{ij})$. On a

$$|c_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| = |d_{ij}|$$

de sorte que $|AB| \leq |A|.|B|$ et en appliquant l'inégalité avec $B = x$ on obtient $|Ax| \leq |A||x|$.

2. Si A est une matrice strictement positive et x est un vecteur positif non nul alors les coefficients de Ax sont $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_{k_0} > 0$. Comme $a_{ik} > 0$ et $x_k \geq 0$ pour tout k , on en déduit $y_i > 0$ d'où $Ax > 0$.

3. Montrons la contraposée : si $A \neq 0$, il existe i, j tels que $a_{ij} \neq 0$. Si $Ax = y$,

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \geq a_{ij} x_j > 0.$$

ce qui entraîne $Ax \neq 0$.

4. En élevant au carré on obtient

$$\begin{aligned} |z + z'| = |z| + |z'| &\iff 2\Re(z\bar{z}') = 2|zz'| &\iff z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+ \\ & &\iff z'\bar{z} = r \in \mathbb{R}_+ \\ & &\iff z' = \frac{r}{|z|^2} z \\ & &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, z' = \alpha z. \end{aligned}$$

5. Pour n complexes z_k , les inégalités triangulaires

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1 + z_k| + |z_2| + \cdots + |z_n| \leq |z_1| + |z_k| + |z_2| + \cdots + |z_n|,$$

entraînent, si les extrémités sont identiques

$$|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$$

et d'après ce que l'on vient de voir, $z_k = \alpha_k z_1$ avec $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$. Cela implique $z_k = |z_k|e^{i\theta}$ où $\theta = \arg(z_1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

6. Soit A une matrice strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrons que

$$|Ax| = |A||x| \implies \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad x = e^{i\theta}|x|.$$

On a

$$|Ax| = |A||x| \iff \forall l \in \mathbb{N}_n \quad \left| \sum_{k=1}^n a_{lk} x_k \right| = \sum_{k=1}^n a_{lk} |x_k| = \sum_{k=1}^n |a_{lk} x_k|$$

$z_k = a_{lk} x_k$, on trouve $|\sum_{k=1}^n z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ et la question précédente montre l'existence d'un réel θ_l tel que pour tout k , $z_k = |z_k|e^{i\theta_l}$. En fait θ_k est indépendante de l puisque c'est l'argument de $z_k = a_{lk} x_k$ et $a_{lk} > 0$. Donc $a_{lk} x_k = |a_{lk} x_k|e^{i\theta}$ et a_{lk} étant strictement positif,

$$\forall k \in \mathbb{N}_n \quad x_k = |x_k|e^{i\theta}$$

ce qui traduit $x = |x|e^{i\theta}$.

Partie III

1. Un calcul élémentaire donne que les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a^2 \neq c^2, \quad \text{sont } \frac{a+c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \text{ et } \frac{a+c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

Clairement le rayon spectral est $\frac{a+c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$, puisque $a^2 \neq c^2$.

2. Notons $\text{Spec}(A)$ le spectre de l'opérateur A . C'est par définition l'ensemble des valeurs propres de A . Si $\lambda \in \text{Spec}(A)$, il existe un vecteur

propre non nul $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Notons $[c_1, \dots, c_n]$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de $\mathbb{C}^n$. Si $X = [x, x, \dots, x]$,

$$AX = A[x, x, \dots, x] = [\lambda x, \lambda x, \dots, \lambda x] = \lambda X.$$

3. Si $\lambda \in \text{Spec}(A)$ avec les précédentes notations,

$$\|AX\| = |\lambda| \|X\| \leq \|A\| \|X\| \implies |\lambda| \leq \|A\|.$$

Comme $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} |\lambda|$, on déduit $\rho(A) \leq \|A\|$.

4. Les polynômes caractéristique de A et $S^{-1}AS$ sont les mêmes puisque

$$\det(XI - A) = \det(S^{-1}(XI - A)S) = \det(XI - S^{-1}AS),$$

de sorte que $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(S^{-1}AS)$ et $\rho(A) = \rho(S^{-1}AS)$.

5. Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$. En effet A est trigonalisable car le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, il existe, donc, une matrice inversible S tel que $T = S^{-1}AS$ est triangulaire supérieure

$$T = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} t_1 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & t_n \end{pmatrix}$$

On a

$$T^k = S^{-1}A^kS = \begin{pmatrix} t_1^k & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & t_n^k \end{pmatrix}$$

de sorte que $\rho(T) = \rho(A)$ et $\rho(T^k) = \rho(A^k)$. Les valeurs propres des matrices triangulaires T et T^k sont situées dans la diagonale principale, donc

$$\text{Spec}(T) = \{t_1, \dots, t_n\} \quad \text{et} \quad \text{Spec}(T^k) = \{t_1^k, \dots, t_n^k\}$$

et

$$\rho(T^k) = \max_{i \in \mathbb{N}_n} |t_i^k| = \left(\max_{i \in \mathbb{N}_n} |t_i| \right)^k = \rho(T)^k.$$

On obtient bien $\rho(A^k) = \rho(A)^k$. Il résulte que $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$, donc $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.

6. On vérifie sans peine que l'application $N : A \mapsto \|S^{-1}AS\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est sous-multiplicative car $\| \cdot \|$ l'est. En effet

$$N(AB) = \|S^{-1}ABS\| = \|S^{-1}ASS^{-1}BS\| \leq \|S^{-1}AS\| \|S^{-1}BS\| = N(A)N(B).$$

7. Un Calcul élémentaire permet d'écrire que $(\Delta^{-1}T\Delta)_{ij} = t_{ij}d^{j-i}$. Soit S une matrice inversible telle que $T = S^{-1}AS$. Supposons que T soit triangulaire supérieure. Alors $t_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. Par la question précédente $N(X) = \|(S\Delta)^{-1}XS\Delta\|_{\infty}$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et

$$N(A) = \|(\Delta)^{-1}T\Delta\|_{\infty} = \max_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum_{j=1}^n |t_{ij}d^{j-i}| \right).$$

En prenant $d \in]0, 1[$ et en posant $t = \max_{i,j \in \mathbb{N}_n} |t_{ij}|$, on trouve

$$N(A) = \max_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum_{j=1}^n |t_{ij}d^{j-i}| \right)$$

avec

$$\sum_{j=i}^n |t_{ij}|d^{j-i} = |t_{ii}| + \sum_{j=i+1}^n |t_{ij}|d^{j-i} \leq \rho(A) + \tau \sum_{j=i}^n d^{j-i} = \rho(A) + \tau \frac{d}{d-1}.$$

Comme $\lim_{d \rightarrow 0} \tau \frac{d}{d-1} = 0$, si $\varepsilon > 0$ est donné à l'avance, on peut choisir $d \in]0, 1[$ tel que $\tau \frac{d}{d-1} < \varepsilon$ et l'on obtient bien

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

8. La question précédente combinée avec la sous-multiplicative de N permettent d'écrire

$$N(A^k) \leq N(A)^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k.$$

Comme $\rho(A) < 1$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$, de sorte que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\rho(A) + \varepsilon)^k = 0$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} N(A^k) = 0$. La suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge

vers 0 pour la norme N or tout les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie il résulte que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

9. Considérons la matrice $A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Il vient

$$\rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$$

et par ce qui précède $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_\varepsilon^k = 0$. On en déduit qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k > k_0$ on ait

$$\|A_\varepsilon^k\| \leq 1 \implies \|A^k\| \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$$

On en déduit

$$k \geq k_0 \implies \rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, i.e. $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie IV

1. L'ensemble Λ est évidemment majoré (par exemple par la somme des éléments de A) et par définition de λ_0 , il existe (X_m) de $\mathcal{S}$ et (α_m) de Λ telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lambda_0 \quad \text{et} \quad \forall m, AX_m \geq \alpha_m X_m.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ donc compact de sorte que l'on peut extraire de la suite (X_m) une sous-suite convergente (X_{m_l}) . Notons $X \in \mathcal{S}$ sa limite. Comme $AX_{m_l} \geq \alpha_{m_l} X_{m_l}$, par passage à la limite on obtient $AX \geq \lambda_0 X$. Si $AX \neq \lambda_0 X$, on a $AX > \lambda_0 X$. En composant par A à gauche, on obtient, du fait que $A > [0]$, l'inégalité $AY > \lambda_0 Y$, où $Y = AX$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $AY \geq (\lambda_0 + \varepsilon)Y$, ce qui contredit la définition de λ_0 car quitte à multiplier Y par une constante positive non nulle, on peut supposer $Y \in \mathcal{S}$.

Ainsi $AX = \lambda_0 X$ avec $X \in \mathcal{S}$ or $A > [0]$ entraîne $AX > 0$ donc $\lambda_0 X > 0$ on en déduit $X > 0$.

2. Supposons que $\lambda \neq \lambda_0$ est une autre valeur propre de A et notons $Z = (z_i)$ un vecteur propre associé. On a

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \lambda z_i$$

donc

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} |z_j| \geq |\lambda| |z_i|$$

i.e. $A|Z| \geq |\lambda||Z|$. On en déduit que $|\lambda| \in \Lambda$ car quite à multiplier $|Z|$ par une constante on peut toujours supposer que $|Z| \in \mathcal{S}$. Donc $|\lambda| \leq \lambda_0$. Il reste montrer que le cas d'égalité n'a pas lieu. Supposons que $\lambda = \lambda_0$. Comme $A > [0]$ il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $A_\delta = A - \delta I_n \geq [0]$. Comme λ_0 est la plus grande valeur propre réelle positive de A , $\lambda_0 - \delta$ est la plus grande valeur propre réelle positive de A_δ . En répétant l'argument précédent à la matrice A_δ et à la valeur propre $\lambda - \delta$, on obtient $|\lambda - \delta| \leq \lambda_0 - \delta$. Mais

$$\lambda_0 = |\lambda| = |\lambda - \delta + \delta| \leq |\lambda - \delta| + \delta \leq \lambda_0,$$

de sorte que $|\lambda| = |\lambda - \delta| + \delta$, ce qui n'est possible que si λ est un réel positif. Donc $\lambda = |\lambda| = \lambda_0$, ce qui contredit que $\lambda \neq \lambda_0$. Donc $|\lambda| < \lambda_0$.

3. On sait qu'il existe un vecteur propre $X \geq 0$ tel que $X \in E_{\lambda_0}$. Supposons que $\dim(E_{\lambda_0}) \geq 2$, de sorte qu'il existe $Y \in E_{\lambda_0}$ tel que (X, Y) est une famille libre. Il existe μ tel que $X - \mu Y \geq 0$ (on peut prendre $\mu = \inf \left\{ \frac{x_i}{|y_i|}, y_i \neq 0 \right\}$). Comme $A > [0]$ on a $AX - \mu AY > 0$, i.e. $\lambda_0 (X - \mu Y) > 0$, ce qui contredit le choix de μ . D'où le résultat.