ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Les résultats seront encadrés.

Pour n entier ≥ 1, On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp.$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

Si $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A \leq B$ (resp. $A < B$.) si pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ (resp. $a_{i,j} < b_{i,j}$). A est positive (resp. strictement positive) si $A \geq [0]$ (resp $A > [0]$),[0] désigne la matrice nulle.

Un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est dit positif (resp. strictement positif) si ses coordonnées sont positives (resp. strictement positives).

Une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite sous-multiplicative si

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

Partie I

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme : $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto ||x|| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

1. Montrer que $||\ \ ||_\infty \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$||A||_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

est une norme.

2. Si $A = (a_{i,j})$, vérifier que

$$||A||_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

3. Montrer que la norme $||\ \ ||_\infty$ est sous-multiplicative.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Partie II

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $|A| = (|a_{i,j}|)$ et $|x| = (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$.

1. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$, alors $|A + B| \leq |A| + |B|$, $|AB| \leq |A||B|$ et $|Ax| \leq |A||x|$.

2. Montrer que si A est une matrice strictement positive et x un vecteur positif non nul alors Ax est un vecteur strictement positif.

3. Montrer que si A est une matrice positive et x un vecteur strictement positif alors $Ax = 0$ implique A=0.

4. Montrer que si deux complexes z, z' vérifient $|z + z'| = |z| + |z'|$, alors il existe un réel λ tel que $z' = \lambda z$.

5. En déduire que si $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^n$ sont n nombres complexes ($n \geq 2$) tels que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \ \ \forall\ k \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad z_k = e^{i\theta}|z_k|$$

6. Soit A une matrice strictement positive et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$|Ax| = |A||x| \Longrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \ \ x = e^{i\theta}|x|.$$

Partie III

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $||\ \ ||$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, on appelle rayon spectral le nombre $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible, $T = (t_{i,j})$ une matrice triangulaire semblable à la matrice A et λ une valeur propre de la matrice A.

1. Déterminer le rayon spectral de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 \neq c^2$.
2. Montrer qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AX = \lambda X$.
3. En déduire que $\rho(A) \leq ||A||$.
4. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.
5. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$. En déduire que $\rho(A) \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$.
6. Montrer que l'application $N : A \mapsto ||S^{-1}AS||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Soit $\varepsilon > 0$ et $\triangle = (\triangle_{i,j})$ la matrice donnée par

$$\triangle_{i,j} = 0, \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \triangle_{i,i} = d^{i-1}, 1 \leq i \leq n, \quad \text{où} \quad d > 0.$$

Calculer $\triangle^{-1}T\triangle$, En déduire qu'il existe une norme sous-multiplicative N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

8. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} A^k = 0$.
9. En déduire que $\rho(A) = \lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}}$ (considérer la matrice $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$).

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Partie IV

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive.

On note $\mathcal{S}_+ = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.

1. Montrer que l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} / \exists X \in \mathcal{S}_+, AX \geq \lambda X\}$$

est majoré et que sa borne supérieure λ_0 est une valeur propre réelle de A associée à un vecteur propre X strictement positif.

2. Si $\lambda \neq \lambda_0$ est une autre valeur propre de A, montrer que $|\lambda| < \lambda_0$.

3. Montrer que le sous espace propre E_{λ_0} de A associé à la valeur propre λ_0 est de dimension 1.