Avril 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

$\mathbb{N}_n$ désigne $\{1, \cdots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I

1. On a bien

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 dt &= \int_0^1 \sum_{0 \le i,j \le n} x_i x_j t^{i+j} dt \\
&= \sum_{0 \le i,j \le n} x_i x_j \frac{1}{i+j+1} = q_n(X) \cdot
\end{aligned}$$

Il en résulte que q_n est définie positive.

2. a) Par linéarité, il suffit de vérifier l'égalité pour $P(t) = t^k$. Or

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 t^k dt &= \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} \\
\text{et} \quad i \int_0^\pi e^{i(k+1)\theta} d\theta &= \frac{1}{(k+1)} \left(e^{i(k+1)\pi} - 1 \right) = \frac{1}{k+1} \left((-1)^{(k+1)} - 1 \right) \cdot
\end{aligned}$$

La somme de ces quantités vaut 0.

b) Si $X \neq 0$, le polynôme $P(t) = x_0 + \cdots + x_n t^n$ est non nul. Donc

$$\begin{aligned}
q_n(X) &= \int_0^1 P(t)^2 dt < \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \\
&= |\int_{-1}^1 P(t)^2 dt| = |i \int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta} d\theta|,
\end{aligned}$$

On en déduit que $q_n(X) < \displaystyle\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta \cdot$

c) On a

$$\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0 \le j,k \le n} x_k x_j \int_0^\pi e^{i(j-k)\theta} d\theta,$$

puisque les x_j sont réels. Donc

$$\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{0 \le j \neq k \le n} x_k x_j \frac{(-1)^{(j-k)} - 1}{j-k} + \pi \sum_0^n x_j^2 = \pi ||X||_2^2 \cdot$$

Ainsi $q_n(X) < \pi||X||_2$.

3. A étant symétrique, il existe alors une matrice orthogonale O telle que

$$A = {}^tO\Lambda O$$

avec $\Lambda_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\Lambda_{i,i} = \lambda_i$, les λ_i étant les valeurs propres de A. Il résulte que si on pose $Y = OX$, on aurrait

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Ainsi, si les λ_i étaient strictement positifs on aurait ${}^tXAX \geq 0$ et inversement en prenant le vecteur X_i tel que $OX_i = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq n}$, avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$, on obtient ${}^tXAX = \lambda_i > 0$.

4. Puisque H_n est définie positive il résulte des questions 3. et 2. c) que $Sp(H_n) \subset]0, \pi[$.

5. a) Les valeurs propres de $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ sont les racines de $\lambda^2 - \dfrac{4}{3}\lambda + \dfrac{1}{12}$,
soit

$$\lambda_1 = \frac{4+\sqrt{13}}{6}, \lambda_2 = \frac{4-\sqrt{13}}{6}$$

.
b) $q_1(X)$ s'écrit dans une base de vecteurs propres

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

c) Il résulte que l'équation de Γ s'écrit

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1.$$

où $a_i^2 = \dfrac{1}{\lambda_i}$.
d) Le tracé en découle, il s'agit d'une ellipse.

6. Puisque H_1 est définie positive, N est une norme dont Γ est la sphère unité.

Partie II

1. Soit ${}^tX = ({}^tY, y_n) \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$. On a

$${}^tXBX = {}^tYAY + 2y_n{}^tCY + y_n^2 a. \tag{1}$$

Clairement A est symétrique et si $Y = 0$ et $y_n = 1$ on obtient que $a > 0$ car ${}^tXBX > 0$. De même, si $y_n = 0$ et Y est non nul on obtient ${}^tYBY > 0$ car ${}^tXBX > 0$.

2. Comme dans la question I.3., on choisit une base telle que $q_B(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Il résulte que si $||X||_2 = 1$ alors $q_B(X) \geq \alpha_1$, avec égalité pour le vecteur dont les coordonnées sont toutes nulles sauf celles d'indice i qui vaut α_1. D'où $\min\limits_{||X||_2=1}(q_A(X)) = \alpha_1$, de même pour $\beta_1 = \max\limits_{||X||_2=1}(q_A(X))$.

3. En prenant dans (1), $y_n = 0$, il résulte que $q_B(X) = q_A(Y)$ par suite $q_A(Y) \geq \alpha_2$ et ainsi $\alpha_1 \geq \alpha_2$. De même pour $\beta_2 \geq \beta_1$.

4. a) Appliquer (1) avec $y_n = u$ et $Y = X$.

b) En calculant le second membre et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|^t XC| \leq ||X||_2 ||C||_2$$

et par suite l'inégalité recherchée.

5. Prenons un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre β_2. Il vient

$$q_B(X) = \beta_2 \leq \max_{u^2+v^2=1} \left\{ \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}.$$

Où $D = \begin{pmatrix} \beta_2 & ||C||_2 \\ ||C||_2 & a \end{pmatrix}$. Donc $\beta_2 \leq \max_{\lambda \in Sp(D)} \lambda = \dfrac{1}{2} \left\{ \beta_1 + a + \sqrt{4||C||_2^2 + (\beta_1 - a)^2} \right\}$.

5. Clairement par ce qui précède (II.3) (α_n) est une suite décroissante et (β_n) est croissante. L'inégalité découle du la question II.4 .c) qui permet d'obtenir

$$\beta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left\{ \beta_n + \frac{1}{2n+3} + \sqrt{\left(\beta_n - \frac{1}{2n+3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2}\right)} \right\}$$

Or pour tout $a, b \geq 0$, on a

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Il résulte que

$$\beta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left\{ \beta_n + \frac{1}{2n+3} + \left| \beta_n - \frac{1}{2n+3} \right| + 2\sqrt{\left(\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2}\right)} \right\}$$

Mais $\beta_n \geq \beta_0 = 1$. Donc $\beta_n \geq \dfrac{1}{2n+3}$ et

$$\beta_n + \frac{1}{2n+3} + \left| \beta_n - \frac{1}{2n+3} \right| = 2\beta_n.$$

D'autre part

$$\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^2} \leq \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

D'où l'inégalité recherchée.

Partie III

1. Facile à voir.

2. Il suffit de voir que $\delta_n = \inf_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[t]} \left\{ ||e_n - P||^2 \right\}$, avec $e_n(t) = t^n$ et la norme $|| \ ||$ étant associée au produit scalaire définie dans III 1. Il vient qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ tel que $||e_n - P||^2 = \delta_n$ et pour tout $i \in [0, n-1]$,

$$< e_n - P, e_i >= 0.$$

3. a) Constatons que pour tout $k \in [0, n-1]$ on a

$$F(k) = \int_0^1 (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n) t^k dt = 0.$$

b) On peut écrire

$$F(X) = \frac{A(X)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}$$

avec $deg(A) \leq n$ et de a) on déduit que $A(0) = \cdots = A(n-1) = 0$, ainsi

$$A(X) = \lambda X(X-1)\cdots(X-n+1)\cdot$$

Donc

$$F(X) = \lambda \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}\cdot$$

Or par la définition de F, on a $F(X)(X+n+1)$ pris en $X = -n-1$ a pour valeur 1. Il résulte que $\lambda = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et par suite

$$F(X) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}\cdot$$

c) $\delta_n = F(n) = \frac{(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}$.

4. Prendre $X = (a_0, \cdots, a_{n-1}, 1)$, il résulte que $\delta_n = q_n(X)$ et par suite

$$\alpha_n \leq \frac{\delta_n}{||X||_2^2} \leq \frac{(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!} = u_n\cdot$$

Il est facile de voir que $u_n \leq \frac{1}{12.15^n}\cdot$ D'où le résultat.

Partie IV

1. On a $AX = B$ et $\Delta X = A^{-1}\Delta B$, car $A\Delta X = \Delta B$ donc $||B||_2 \leq ||A||\ ||X||_2$ et $||\Delta X||_2 \leq ||A^{-1}||\ ||\Delta B||\cdot$ D'où

$$\frac{||\Delta X||_2}{||X||_2} \leq C(A)\frac{||\Delta B||_2}{||B||_2}$$

2. La matrice ${}^tAA$ est symétrique, on peut alors choisir une base orthonormale de vecteurs propres, ainsi, on obtient que $||A||^2 = \max(Sp({}^tAA))$. Par ailleurs ${}^tAA = {}^tA(A{}^tA){}^tA^{-1}$. Donc $Sp({}^tAA) = Sp(A{}^tA)$ et donc

$$||A^{-1}||^2 = \max(Sp(({}^tAA)^{-1})) = \frac{1}{\min(Sp({}^tAA))}\cdot$$

D'où le résultat.

3. Si A est symétrique définie positive alors ${}^tA = A$, il vient que

$$C(A) = \frac{\max(Sp(A))}{\min(Sp(A))}$$

4. Si $C(A) = 1$ alors $\max(Sp(({}^tAA)^{-1})) = \min(Sp({}^tAA))$. Donc la valeur propre $\min(Sp({}^tAA))$ est de multiplicité n. Il résulte que ${}^tAA = \min(Sp({}^tAA))Id$ et donc $\frac{A}{\sqrt{\min(Sp({}^tAA))}}$ est orthogonale.

5. On a ${}^tQAQA = {}^tAA$ Donc $C(A) = C(QA)$.
6. On a
$$C(H_n) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \geq \frac{\beta_1}{\alpha_n} \geq \frac{4+\sqrt{13}}{6} \times 12 \times 15^{n-1}.$$