ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour n, p entiers ≥ 1, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$ est notée ${}^tM$.

Si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire usuel par $< X, Y >= {}^tXY$, la norme associée est notée $||X||_2 = \sqrt{< X, X >}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe $\Phi_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \longmapsto AX$, on pose :

$$||\Phi_A|| = \sup_{||X||_2 \leq 1} ||AX||_2 = ||A||$$

On définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\begin{gathered} \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ ||AB|| \leq ||A||\ ||B|| \quad \text{et} \quad ||AX||_2 \leq ||A||\ ||X||_2 \end{gathered}$$

$\text{Sp}(A)$ désigne le spectre (l'ensemble des valeurs propres) de A.

Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si la forme quadratique $q_A : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tXAX \in \mathbb{R}$ est définie positive.

Partie I

On note H_n la matrice de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $H_n = (a_{i,j})$ où :

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$$

sa forme quadratique associée est notée q_n. On a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$:

$$q_n(X) = {}^tXH_nX$$

1. Montrer que $q_n(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1t + \cdots + x_nt^n)^2dt$ si ${}^tX = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

2. a) Montrer que si P est un polynôme à coefficients complexes, on a :

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx + i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0$$

b) En déduire que :

$$q_n(X) < \int_0^{\pi} |x_0 + x_1e^{i\theta} + \cdots + x_ne^{in\theta}|^2dt$$

c) En utilisant b), établir que : $q_n(X) < \pi||X||_2^2$.

3. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont des éléments de $\mathbb{R}_+^*$.

4. En déduire que $Sp(H_n)$ est une partie de $]0, \pi[$.

5. a) Déterminer $Sp(H_1)$.

b) Écrire l'expression de $q_1(X)$ dans une base orthonormale de vecteurs propres.

c) En déduire la nature de l'ensemble Γ défini ainsi :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\}$$

d) Représenter Γ dans un repére orthonormé en prenant 2 cm pour unité.

6. Montrer que l'application $N : X \longmapsto \sqrt{{}^tXH_1X}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Que représente Γ pour N sur $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

Partie II

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$B = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \min(Sp(A)), \quad \alpha_2 = \min(Sp(B)), \quad \beta_1 = \max(Sp(A)) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \max(Sp(B))$$

1. Montrer que si B est une matrice symétrique définie positive, alors A est une matrice symétrique définie positive et a est strictement positif.

2. En exprimant $q_A(X)$ dans une base convenable, montrer que : $\alpha_1 = \min\limits_{||X||_2=1} (q_A(X))$ et $\beta_1 = \max\limits_{||X||_2=1} (q_A(X))$.

3. En déduire que $\alpha_2 \leq \alpha_1$ et $\beta_1 \leq \beta_2$.

4. Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ u \end{pmatrix}$ où $u \in \mathbb{R}$.

   a) Montrer que $q_B(Y) = q_A(X) + 2u^tXC + au^2$.

   b) Montrer que $q_B(Y) \leq \begin{pmatrix} ||X||_2 & |u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & ||C||_2 \\ ||C||_2 & |u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||X||_2 \\ |u| \end{pmatrix}$.

   c) En déduire que $\beta_2 \leq \dfrac{1}{2} \left\{ \beta_1 + a + \sqrt{4||C||_2^2 + (\beta_1 - a)^2} \right\}$.

5. On considère $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n+1}$ et on pose $\alpha_n = \min(Sp(H_n))$, $\beta_n = \max(Sp(H_n))$. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante avec :

$$\beta_{n+1} \leq \beta_n + \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Partie III

On définit sur $\mathbb{R}_n[t]$ (ensemble des polynômes de degré n) l'application bilinéaire suivante :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[t], \qquad < P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

et on pose :

$$\delta_n = \inf_{(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1} + t^n \right) dt$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. En déduire qu'il existe un unique vecteur $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\delta_n = \int_0^1 \left(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n \right) dt$$

$$\text{et} \quad \forall k \in \{0, \cdots, n-1\}, \quad \int_0^1 \left(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n \right) \, t^k dt = 0$$

3. Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(X) = \frac{a_0}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{X+n-1} + \frac{1}{X+n+1}$$

   a) Montrer que $F(0) = F(1) = \cdots = F(n-1) = 0$.

b) En déduire que $F(X)$ s'exprime sous la forme :

$$F(X) = \frac{A(X)}{(X+1)(X+2)\cdots(X+n+1)}$$

On déterminera explicitement $A(X)$.

c) En déduire que $\delta_n = F(n) = \dfrac{(n!)^4}{2n!(2n+1)!}$.

4. α_n ayant été défini à la question II. 5., montrer que :

$$0 < \alpha_n < \frac{1}{12.15^n}$$

Partie IV

Pour toute matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle conditionnement de A le réel défini par :

$$C(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$$

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'unique solution de $AX = B$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), B \neq 0$. Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que : $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$. Montrer que :

$$\frac{||\Delta X||_2}{||X||_2} \leq C(A)\frac{||\Delta B||_2}{||B||_2}$$

2. Montrer que pour toute matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$C(A) = \sqrt{\frac{\max\left(Sp({}^tAA)\right)}{\min\left(Sp({}^tAA)\right)}}$$

3. En déduire une expression de $C(A)$ lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

4. Montrer que si $C(A) = 1$ alors il existe $\mu > 0$ tel que la matrice μA soit orthogonale.

5. Comparer $C(A)$ et $C(QA)$ si Q est une matrice orthogonale.

6. Donner une minoration de $C(H_n)$ grâce au calcul de β_1, $n \geq 1$.