Avril 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n, $(n \geq 1)$.

Partie I

a. Si μ et ν sont deux valeurs co-propres associées au vecteur co-propre x, alors $(\mu - \nu)x = 0$ ce qui entraîne que $\mu = \nu$.
b. Il est clair que E_μ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car $\overline{\lambda} = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Soit $x \neq 0$ un vecteur co-propre associée à μ. Nous avons :

$$u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}\mu x = e^{i\theta}\mu e^{-i\frac{\theta}{2}}x$$

et donc $e^{-i\frac{\theta}{2}}x$ est un vecteur co-propre pour $e^{i\theta}\mu$.
d) On en déduit de la question précédente que E_μ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
e) Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$u \circ v(x + \lambda y) = (u \circ v)(x) + u(\overline{\lambda}v(y)) = (u \circ v)(x) + \lambda(u \circ v)(y),$$

donc $u \circ v$ est linéaire.

Partie II

a. A est la matrice de u dont les vecteurs colonnes sont Ae_i, exprimés dans la base (e_i). Or $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et comme u est semi-linéaire, on a $A\overline{X} = \sum_{i=1}^n x_i A e_i = Y$, où Y est la matrice colonne associée au vecteur $y = u(x)$.

b. Soient x et y des vecteurs liés par $y = u(x)$. Si X et X' (resp. Y et Y') sont les matrices-colonnes de x (resp. y) dans les bases (e_i) et (f_i), alors on a les relations suivantes :

1. $Y = A\overline{X}$.

2. $Y' = A\overline{X'}$.

3. $X = SX'$ et $Y = SY'$. Alors $Y = SY' = SB\overline{X'} = SB\overline{S^{-1}}\overline{X}$, et donc $A = SB\overline{S^{-1}}$.

c. Si μ est une valeur co-propore asscoiée au vecteur co-propore X alors $-\overline{b} = \mu a$ et $\overline{a} = \mu b$. Comme X n'est pas nul alors $a \neq 0, b \neq 0$ et $\mu \neq 0$. On trouve $|\mu|^2 = -1$, ce qui est impossible. La matrice A n'admet pas de valeurs co-propres.

d. Si A est une matrice réelle qui admet une valeur propre réelle λ, alors elle admet pour cette valeur propre un vecteur propre réel non nul X. Il résulte que $A\overline{X} = AX = \lambda X$. λ est ainsi une valeur co-propre.

Partie III

a. Soit X un vecteur co-propre pour μ. Alors, on a

$$A\overline{A}X = A\overline{A\overline{X}} = \overline{\mu}A\overline{X} = |\mu|^2 X,$$

On en déduit que $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A\overline{A}$.

b. *) Cas $A\overline{X}$ et X sont liés. Il existe donc un complexe μ tels que $A\overline{X} = \mu X$. Alors

$$A\overline{A}X = A(\overline{\mu}\overline{X}) = |\mu|^2 X = \lambda X.$$

En particulier, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| = \lambda$ et μ est une valeur co-propre de A. La question précédente permet d'affirmer qu'en fait $\sqrt{\lambda}$ est lui-même une valeur co-propre de A.
*) Cas $A\overline{X}$ et X sont indépendants. Alors

$$\begin{aligned}
\overline{A}(A\overline{X} - \sqrt{\lambda}X) &= \overline{A}A\overline{X} - \sqrt{\lambda}\overline{A}X \\
&= \lambda\overline{X} - \sqrt{\lambda}\overline{A}X \\
&= -\sqrt{\lambda}(\overline{A}X - \sqrt{\lambda}\overline{X}) \\
&= -\sqrt{\lambda}\overline{(A\overline{X} - \sqrt{\lambda}X)}
\end{aligned}$$

et $-\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de A. Donc $\sqrt{\lambda}$ aussi.

c. Découle facilement des deux questions précédentes.

d. Comme T est triangulaire supérieure, $T\overline{T}$ l'est aussi, les coefficients sur la diagonale étant le module au carré des coefficients sur la diagonale de T. Soit λ une valeur propre de T. Comme T est triangulaire supérieure, les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, et $|\lambda|^2$ est une valeur propre de $T\overline{T}$. Il en résulte que $|\lambda|$ est valeur co-propre de T. Nous concluons toujours grâce à I.c.

e. Si μ est une valeur co-propre de T, $|\mu|^2$ est une valeur propre de $T\overline{T}$. Comme les valeurs propres de $T\overline{T}$ sont les modules (au carrée) des valeurs propres de T, il existe λ un complexe tel que $|\lambda| = |\mu|$, et λ est une valeur propre de T.

f. 1 est valeur co-propre de S, car i est valeur propre de S, et $1 = ie^{-\frac{\pi}{2}i}$. En outre

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a-d) + b + c \\ ic + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}$$

Nous résolvons l'équation. Par exemple, le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur co-propre pour 1.

g. Soit X une matrice-colonne de taille n, qu'on décompose en $X = U + iV$, où U et V sont réelles. Alors,

$$A\overline{X} = (BU + CV) + i(CU - BV).$$

Si X est un vecteur co-propre associé à μ, on a en particulier : $BU + CV = \mu U$ et $CU - BV = \mu V$. D'autre part, si on considère la matrice-colonne de taille $2n$, $Y = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, alors :

$$DY = \begin{pmatrix} BU + CV \\ CU - BV \end{pmatrix}$$

Donc, si X est un vecteur co-propre pour μ relativement à D, Y est vecteur propre pour μ relativement à D. Réciproquement, si μ est valeur propre de D, comme D est réelle, il existe un vecteur propre réel (décomposer n'importe quel vecteur propre en partie réelle/partie imaginaire) Y , qu'on décompose comme ci-dessus. Alors le vecteur $X = U + iV$ est un vecteur co-propre de μ (relativement à D).

Partie IV

1. Un simple calcul montre que $A\overline{A} = PD\overline{D}P^{-1}$, où $D\overline{D}$ est diagonale, ses coefficients étant positifs ou nuls. En outre, nous avons :

$$\mathrm{rg}(A\overline{A}) = \mathrm{rg}(D\overline{D}) = \mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(A).$$

2. On a

$$B\overline{B} = P^{-1}A\overline{P}\overline{P}^{-1}\overline{A}P = P^{-1}A\overline{A}P = \Lambda.$$

D'autre part

$$\overline{B}B = \overline{P}^{-1}\overline{A}PP^{-1}A\overline{P} = \overline{P}^{-1}\overline{A}A\overline{P} = \Lambda$$

Il résulte que $B\overline{B} = \overline{B}B$. Il s'en suit que $B\Lambda = BB\overline{B} = \overline{B}BB = \Lambda B$.

3. Comme B commute avec Λ, le noyau de $\Lambda - \lambda_p I_n$ est stable par B. On peut alors écrire B sous la forme demandée.

4. Du fait que $B\overline{B} = \Lambda$, chaque matrice B_p vérifie que $B_p\overline{B_p} = \lambda_p I_{n_p}$. Si $\lambda_p \neq 0$, on utilise alors le résultat de III.c., appliqué à la matrice $A = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_p}}B_p$, pour prouver que B_p est co-semblable à une matrice diagonale. Le cas litigieux de $\lambda_k = 0$ se traite de la façon suivante : comme le rang de $A\overline{A}$ vaut le rang de A, le rang de B est celui de Λ . Dans le cas où $\lambda_k = 0$, le rang de Λ est $n_1 + \cdots + n_{k-1}$. Le rang de B est $rg(B_1) + \cdots + rg(B_k)$. Mais le calcul $B_p\overline{B_p} = \lambda_p I_{n_p}$ prouve que pour $p < k$, le rang de B_p est exactement n_p. On trouve donc que le rang de B_k est nul, ou encore que $B_k = 0$. En résumé, pour tout p de 1 à k, il existe des matrices inversibles S_p et des matrices diagonales D_p telles que $B_p = S_p D_p \overline{S_p}^{-1}$. Nous posons alors :

$$P = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & S_2 & \cdots & \\ \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & S_k \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & D_2 & \cdots & \\ \ddots & & & \\ 0 & \cdots & & D_k \end{pmatrix}$$

Nous avons $B = PD\overline{P}^{-1}$, et donc B est co-diagonalisable. Comme cette notion est invariante par matrice co-semblable, A est aussi co-diagonalisable.

5. Il suffit de constater que les conditions $i)$ et $ii)$ pour une matrice symétrique réelle sont très faciles à vérifier. Il reste à montrer que le rang de A et A^2 sont les mêmes. Pour cela, constatons que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont orthogonaux. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(A)$ et $y = Az$, pour un certain z on a

$$< x, y > = < x, Az > = < Ax, z > = < 0, z > = 0.$$

Il résulte que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont en somme direct et A est co-diagonalisable.

6. Nous essayons d'appliquer comme dans la question précédente les conditions $i), ii)$ et $iii)$. On a

$$B\overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, D\overline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E\overline{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

- B est co-diagonalisable et non diagonalisable.

- C est diagonalisable mais pas co-diagonalisable.

- D est ni diagobalisable ni co-diagonalisable.

- E est diagonalisable et co-diagonalisable.