ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET D'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n, $(n \geq 1)$.

Partie I

Dans cette partie on étudie les propriétés spectrales d'une application semi-linéaire.
Une application u de E dans lui-même est dite semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u(a\ x + y) = \overline{a}\ u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\bar{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu\ x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Démontrer qu'étant donné un vecteur x, différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que $u(x) = \mu\ x$.

b. Soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu\ x$:

$$E_\mu = \{x\ :\ u(x) = \mu\ x\}$$

E_μ est-il un espace vectoriel réel ?

c. Soit μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Démontrer que pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore une valeur co-propre de u.

d. L'ensemble E_μ est-il un espace vectoriel complexe ?

e. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

Partie II

Soient u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de l'espace vectoriel E. A un vecteur x, de coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est associée une matrice-colonne X d'éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n$ appelée (abusivement) vecteur.

a. Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E une matrice A, carrée, complexe, d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

$$Y = A.\overline{X}.$$

La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.

b. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u respectivement dans les bases $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ à la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de $0, (X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A.\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

c. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

d. Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

Partie III

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n et T une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

a. Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

b. Soient λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A.\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :

- les vecteurs $\overline{A}.X$ et X sont liés ,
- les vecteurs $\overline{A}.X$ et X sont indépendants.

c. En déduire que le réel positif ou nul μ est une valeur co-propre de la matrice A, si et seulement si le réel μ^2 est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

d. Soit λ est une valeur propre de la matrice T. Démontrer que pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice T.

e . Soit μ est une valeur propre de la matrice T. Démontrer qu'il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice T.

f. Soit S la matrice définie par :

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser :

$$X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}.$$

g. Soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + iC.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est une valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Partie IV

On dit qu'une matrice A d'ordre n est co-diagonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que la matrice $P.A.\overline{P}^{-1}$ soit diagonale.

1. Montrer que si A est co-diagonalisable alors la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

On suppose maintenant qu'une matrice carrée complexe A d'ordre n vérifie les trois propriétés suivantes :

i) la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable,

ii) les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$ sont positives ou nulles,

iii) le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

En vue de ii), soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, les valeurs propres, deux à deux distinctes, de la matrice $A.\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon quelles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k \geq 0.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, ont respectivement les multiplicités $n_1, n_2, \cdots, n_k$. Soit I_p la matrice identité d'ordre p. Une matrice diagonale Λ semblable à la matrice $A.\overline{A}$, s'écrit par blocs avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

Par hypothèse il existe une matrice P inversible telle que

$$A.\overline{A} = P.\Lambda.P^{-1}.$$

Soit B la matrice définie par la relation suivante :

$$B = P^{-1}.A.\overline{P}.$$

2. Les relations suivantes sont-elles vérifiées ?

$$B.\overline{B} = \overline{B}.B \ ; \ B.\Lambda = \Lambda.B.$$

3. Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette expression chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$$

4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale D d'ordre n telles que la relation ci-dessous ait lieu :

$$B = Q.D.\overline{Q^{-1}}.$$

Conclure que toute matrice vérifiant les hypothèses $i), ii)$ et $iii)$ est co-diagonalisable.

5. Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n, S est-elle co-diagonalisable ?

Soient B, C, D et E les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? co-diagonalisables ?