Avril 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Partie I

a. La bilinéarité et l'antisymétrie se vérifient aisément. Pour le reste, remarquons que :

$$\omega(x,y)=0 \Longleftrightarrow <\eta(x),y>=0.$$

Le produit scalaire euclidien étant non-dégénéré,

$$\omega(x,y)=0, \forall y\in\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \eta(x)=0.$$

Comme on est en dimension finie, la nullité du noyau est équivalente à l'inversibilité et le résultat est prouvé.

b. On considère, pour $x\in\mathbb{R}^n$ fixé :

$$\begin{array}{rccc} \phi_x : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \omega(x,y) \end{array}$$

ϕ_x est linéaire et il existe un unique $\eta(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall y\in\mathbb{R}^n, \qquad <\eta(x),y>=\phi_x(y)=\omega(x,y).$$

En outre, $x\longmapsto\eta(x)$ est linéaire. En effet, pour tout x_1,x_2,λ, pour tout $y\in\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned} <\eta(\lambda x_1+x_2),y> &= \omega(\lambda x_1+x_2,y) \\ &= \lambda\omega(x_1,y)+\omega(x_2,y) \\ &= \lambda<\eta(x_1),y>+<\eta(x_2),y> \\ &= <\lambda\eta(x_1)+\eta(x_2),y>, \end{aligned}$$

et c'est l'unicité qui permet de conclure à la linéarité de η. En outre,

$$\begin{aligned} <\eta^*(x),y> &= <x,\eta(y)> \\ &= <\eta(y),x> \\ &= \omega(x,y) \\ &= -\omega(x,y) \\ &= <-\eta(x),y>, \end{aligned}$$

et donc $\eta^*=-\eta$. En outre, la question précédente donne directement que η est inversible.

c. S'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, il existe en particulier un endomorphisme inversible η de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^*=-\eta$. Mais alors, si λ est valeur propre de η de multiplicité k, $-\lambda$ est valeur propre de η^* de multiplicité k, et donc $-\lambda$ est valeur propre de η de multiplicité k (les endomorphismes sont réels, mais les valeurs propres peuvent être complexes). Comme 0 n'est pas valeur propre de η, et que n est la somme des multiplicités des valeurs propres de η, en regroupant chaque valeur propre avec son opposée, on trouve que n est pair.

d. 1) Comme $\underline{J}^* = -\underline{J}$ (vérification triviale sur les matrices), et $\underline{J}$ est inversible, ω_0 est symplectique.
2) Si $1 \leq k \leq m$ alors $\underline{J}e_k = e_{k+m}$ et par suite

$$\omega_0(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = k+m; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

si $m+1 \leq k \leq 2m$ alors $\underline{J}e_k = -e_{k-m}$ et par suite

$$\omega_0(e_k, e_l) = \begin{cases} -1 & \text{si } l = k-m; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II

1. Remarquons d'abord que J est inversible (son déterminant vaut 1). On a donc : $(\det(M))^2 \det(J) = \det(J)$, et $\det(M) = \pm 1$.
2. Clairement I_{2m} est symplectique. Si A, B sont symplectiques, alors

$${}^t(AB)JAB = {}^tB{}^tAJAB = J.$$

Finalement si A est symplectique alors A est inversible de plus ${}^tA^{-1}JA^{-1} = J$. Or

$${}^tAJA = J \Longleftrightarrow {}^tA^{-1}JA^{-1} = J$$

Il résulte que A^{-1} est symplectique. En conclusion, l'ensemble des matrices symplectiques est un groupe pour la multiplication.
3. On a $J^{-1} = {}^tJ$, ceci prouve que J est symplectique.

4. Nous avons :

$$\begin{aligned} AJ^tA &= {}^t(A^tJ^tA) \\ &= {}^t(AJ^{-1t}A) \\ &= {}^t((A^{-1})^{-1}J^{-1}({}^tA^{-1})^{-1}) \\ &= {}^t({}^t(A^{-1})JA^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Comme l'inverse d'une matrice symplectique est symplectique, la transposée d'une matrice symplectique est aussi symplectique.
5.a) Un calcul immédiat donne

$${}^tMJM = \begin{pmatrix} -{}^tAC + {}^tCA & -{}^tAD + {}^tCB \\ -{}^tBC + {}^tDA & -{}^tBD + {}^tDB \end{pmatrix}$$

M est symplectique si et seulement si

i) $-{}^tAC + {}^tCA = 0_m$.

ii) $-{}^tAD + {}^tCB = -I_m$.

iii) $-{}^tBC + {}^tDA = I_m$.

iv) $-{}^tBD + {}^tDB = 0_m$.

Les conditions $i)$ et $iii)$ sont identiques, tandis que $i)$ et $iv)$ se retraduisent en ${}^tAC$ et ${}^tBD$ sont symétriques.
b) Si une telle matrice existe, on a :

$$\begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-QC & 0_m \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & QD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On pose donc $Q = BD^{-1}$. Refaire le produit prouve que M s'écrit sous la forme demandée. On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(A-QC)det(D) \\ &= \det({}^tA - {}^tC{}^tQ)det(D) \\ &= \det({}^tAD - {}^tC{}^tD^{-1}{}^tBD), \end{aligned}$$

comme ${}^tBD$ est symétrique,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det({}^tAD - {}^tC{}^tD^{-1}{}^tDB) \\ &= \det({}^tAD - {}^tCB) = 1. \end{aligned}$$

Partie III

1. Soit M une matrice symplectique, que l'on écrit sous la forme $M = J^{-1}{}^tM^{-1}J$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par P_A son polynôme caractéristique. Rappelons que 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, et que le polynôme caractéristique d'une matrice et de sa transposée sont identiques. Nous avons alors :

$$P(\lambda) = P_{J^{-1}{}^tM^{-1}J}(\lambda) = P_{{}^tM^{-1}}(\lambda) = P_{M^{-1}}(\lambda).$$

Mais,

$$\begin{aligned} P_{M^{-1}}(\lambda) &= \det(M^{-1} - \lambda I_{2m}) \\ &= \det(M^{-1}(I_{2m} - \lambda M)) \\ &= \det(M^{-1})\det(-\lambda(I_{2m} - \frac{M}{\lambda})) \\ &= (-\lambda)^{2m}\det(I_{2m} - \frac{M}{\lambda}) \\ &= (-\lambda)^{2m}P(\frac{1}{\lambda}). \end{aligned}$$

2. Rappelons que λ_0 est valeur propre de multiplicité d de M si et seulement si λ_0 est racine de multiplicité d de P. Il suffit de prouver le résultat demandé pour $\dfrac{1}{\lambda_0}$ et $\overline{\lambda_0}$:

- Pour $\overline{\lambda_0}$: P est à coefficient réels, si λ_0 est racine de multiplicité d de P, $\overline{\lambda_0}$ aussi.
- Pour $\dfrac{1}{\lambda_0}$: C'est une application directe de III.1).

3. Rappelons que $\det(M) = 1$. Si d est la multiplicité de -1, on a :

$$(-1)^d \prod_{\lambda_i \text{vp} \neq -1} \lambda_i^{d_i} = 1.$$

Maintenant, on regroupe dans le produit chaque valeur propre avec son inverse qui est de même multiplicité, et $\frac{1}{\lambda_i^{d_i}}\lambda_i^{d_i} = 1$. On trouve donc : $(-1)^d = 1$, et donc -1 est de multiplicité paire. Comme la somme des multiplicités fait $2m$, et que si λ_i est de multiplicité d_i, on a :

$$\mathrm{mult}(\lambda_i) + \mathrm{mult}(\frac{1}{\lambda_i}) = 2d_i$$

Il résulte que la multiplicité de 1 est paire aussi.

4.

(a) I_4 est symplectique, et a une seule valeur propre.

(b) $J_2 = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est symplectique, son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^4 + 1$ donc J_2 admet deux valeurs propres doubles distinctes i et $-i$.

(c) Considérons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que M est symplectique. En outre, M a bien une valeur propre double et deux valeurs propres simples.

(d) Expliquons briévement comment choisir M. Si par exemple $2i$ est une valeur propre de M, les autres valeurs propres sont $0.5i$,$-0.5i$ et $-2i$. Nous posons donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que M est symplectique, et les valeurs propres de M sont $2i$,$0.5i$,$-0.5i$ et $-2i$.

Partie IV

1. On a

$$\begin{array}{lll} (i) & \Longleftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad < \underline{J}(\phi(x)), \phi(y)) >=< \underline{J}(x), y) > \\ & \Longleftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}, \quad < \phi^*(\underline{J}(\phi(x))), y) >=< \underline{J}(x), y) > \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \phi^*(\underline{J}(\phi(x))) = \underline{J}(x) \\ & \Longleftrightarrow & M \quad \text{est symplectique.} \end{array}$$

2. Remarquons que nous avons le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, puisque toutes les normes y sont équivalentes. ϕ ayant des valeurs propres distinctes, ϕ est $\mathbb{C}-$diagonalisable. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres, $\phi(x_i) = \lambda_i x_i$, $|\lambda_i| = 1$. Pour $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ de $\mathbb{C}^n$, nous choisissons $||x|| = |a_1| + \cdots + |a_n|$, qui définit aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$ par restriction. Alors :

$$\begin{array}{rcl} ||\phi^p(x)|| & = & ||\lambda_1^p a_1 x_1 + \cdots + \lambda_n^p a_n x_n|| \\ & = & |\lambda_1^p a_1| + \cdots + |\lambda_n^p a_n| \\ & = & |a_1| + \cdots + |a_n| = ||x||. \end{array}$$

En particulier, ϕ est stable.

3. a. En écrivant les produits matriciels, on prouve aisément que l'endomorphisme que nous noterons ϕ est symplectique si, et seulement si, ${}^t\Omega\Omega = I_m$, c'est-à-dire si, et seulement si, Ω est orthogonale. Maintenant, une matrice orthogonale conserve la norme euclidienne, notée $|| \, ||_2$. En particulier, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{2m}$, alors :

$$||\phi(X)||_2^2 = ||\Omega(x)||_2^2 + ||\Omega(y)||_2^2 = ||X||_2^2.$$

Il résulte que l'endomorphisme considéré est stable, par suite la CNS recherchée est : Ω est orthogonale.

b. Si cet endomorphisme ϕ possède une valeur propre de module $\lambda \neq 1$, alors d'aprés III.2., il en posséde une de module > 1. En particulier, il existe z dans $\mathbb{C}^n$ tel que

$$||\phi^k(z)|| \xrightarrow[k \to +\infty]{} \infty \qquad (*).$$

Or si ϕ était stable, en écrivant $z = x + iy$, où x et y sont dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$||\phi^k(z)|| \leq ||\phi^k(x)|| + ||\phi^k(y)|| \leq M,$$

absurde en vue de $(*)$.

4. a. Nous considérons par exemple l'endomorphisme symplectique dont la matrice écrite dans la base canonique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} RI_m & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} I_m \end{pmatrix}$$

b. On a ϕ est symplectique $\Longleftrightarrow$ ϕ^* est symplectique et

$$\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1})) = \omega_0(e_1, e_{m+1}) = 1.$$

D'autre part,

$$\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1})) = (\underline{J}(\phi^*(e_1)), \phi^*(e_{m+1})),$$

si $||\phi^*(e_1)|| < 1$ et $||\phi^*(e_{m+1})|| < 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\omega_0(\phi^*(e_1), \phi^*(e_{m+1}))| < 1,$$

ce qui est absurde.

c. Supposons par exemple que $||\phi^*(e_1)|| \geq 1$, et posons $x = \dfrac{\phi^*(e_1)}{||\phi^*(e_1)||} \in B$. Si $y = \phi(x) = \sum y_i e_i$, alors

$$\begin{aligned} y_1 &= < y, e_1 > \\ &= < \phi(x), e_1 > \\ &= < x, \phi^*(e_1) > \\ &= ||\phi^*(e_1)|| \geq 1, \end{aligned}$$

En particulier $y \notin \Gamma_R$ et $\phi(B) \not\subset \Gamma_R$.