ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET D'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE–SÉNÉGAL

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

Pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices réelles à p lignes et p colonnes. Si $M \in \mathcal{M}_p$, on note $\underline{M}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de la matrice M dans la base canonique. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est désigné par $< .,. >$. La norme euclidienne est notée par $|| \ ||$. Finalement, pour tout endomorphisme η, on désigne par η^* son adjoint défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad < \eta(x), y > = < x, \eta^*(y) > .$$

Partie I

Soit n un entier ≥ 1. On appelle forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ une application $\omega \ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est

- Bilinéaire : Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $x \longmapsto \omega(x,y)$ est linéaire et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $y \longmapsto \omega(x,y)$ est linéaire.
- Antisymétrique : Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$.
- Non-dégénérée : Le seul vecteur x qui vérifie $\omega(x,y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur nul.

a. Soit η un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^* = -\eta$. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \omega(x,y) = < \eta(x), y > . \tag{1}$$

Montrer que ω est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si η est inversible.

b. Soit ω une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un endomorphisme η de $\mathbb{R}^n$ tel que la relation (1) soit vérifée. Montrer que $\eta^* = -\eta$ et que η est inversible.

c. Montrer que s'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, alors n est pair.

d. On suppose dans cette question que $n = 2m$. On pose

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}, \qquad \omega_0(x, y) = < \underline{J}x, y >$$

où J est la matrice donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$$

I_m étant la matrice unité.

1) Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2m}$.

2) Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq 2m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$. Calculer $\omega_0(e_k, e_l), 1 \leq k \leq 2m, 1 \leq l \leq 2m$.

Partie II

On fixe l'entier pair $n = 2m$. On appelle matrice symplectique toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ telle que

$${}^tMJM = J.$$

1. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice symplectique?

2. L'ensemble des matrices symplectiques est-il un groupe pour la multiplication?

3. La matrice J est-elle symplectique?

4. La transposée d'une matrice symplectique est-elle symplectique?

5. On écrit toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A, B, C, D \in \mathcal{M}_m$.

   (a) Montrer que la matrice M est symplectique si et seulement si les matrices A, B, C, D vérifient les conditions
   $$\begin{cases} {}^tAC \ \text{ et } \ {}^tBD \ \text{ sont symétriques} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m \end{cases}$$

   (b) Montrer que si D est inversible, il existe $Q \in \mathcal{M}_m$ telle que
   $$M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

Partie III

Soit M une matrice symplectique et soit P son polynôme caractéristique.

1. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $P(\lambda) = \lambda^{2m} P\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

2. Montrer que si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M, de multiplicité d, alors $\dfrac{1}{\lambda_0}, \overline{\lambda_0}, \dfrac{1}{\overline{\lambda_0}}$ sont des valeurs propres de M, chacune de multiplicité d.

3. Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de -1 et 1?

4. Donner des exemples de matrices symplectiques $\in \mathcal{M}_4$, diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et ayant
   (a) une seule valeur propre ;
   (b) deux valeurs propres doubles distinctes ;
   (c) une valeur propre double et deux valeurs propres simples ;
   (d) quatre valeurs propres distinctes non réelles et de module $\neq 1$.

Partie IV

Soient ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ et M sa matrice dans la base canonique.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{2m}$, $\omega_0(\phi(x), \phi(y)) = \omega_0(x, y)$,
   (ii) la matrice M est symplectique.

Un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ qui vérifie la propriété (i) ci-dessus est appelé *endomorphisme symplectique.*

Un endomorphisme ψ de $\mathbb{R}^n$ est dit *stable* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(||\psi^p(x)||)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, où ψ^p désigne la composée de l'application ψ avec elle-même p fois.

2. Montrer que si un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^n$ a toutes ses valeurs propres distinctes et de module 1 dans $\mathbb{C}$, alors ϕ est stable.

3. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}_m$ pour que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique soit symplectique et stable.

b) Montrer que si un endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ possède une valeur propre dans $\mathbb{C}$ de module $\neq 1$, alors ϕ n'est pas stable.

4. On note $x_1, \cdots, x_{2m}$ les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^{2m}$ dans la base canonique. On considère les ensembles

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad \sum_{k=1}^{2m} x_k^2 \leq 1 \right\},$$

$$C_R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\right\}$$

et

$$\Gamma_R \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^{2m} \quad : \quad x_1^2 + x_{m+1}^2 \leq R^2\right\}, R \text{ étant un réel strictement positif.}$$

4. a) On suppose $m \geq 2$. Montrer que pour tout $R > 0$, il existe un endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ tel que $\phi(B) \subset C_R$.

b) Soit ϕ un endomorphisme symplectique de $\mathbb{R}^{2m}$ et soit ϕ^* l'adjoint de ϕ par rapport au produit scalaire euclidien. Montrer que ou bien $||\phi^*(e_1)|| \geq 1$, ou bien $||\phi^*(e_{m+1})|| \geq 1$.

c) En déduire que, si $R < 1$, il n'existe aucun endomorphisme symplectique ϕ de $\mathbb{R}^{2m}$ tel que $\phi(B) \subset \Gamma_R$.