AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Soit p un projecteur, il vérifie par définition $p = p^2$. Soit λ une valeur propre de p, on a alors :

$\exists x \neq 0 / p(x) = \lambda x$. D'où : $p(x) = p^2(x) = \lambda p(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda x = \lambda^2 x$, et comme x est non-nul : $\lambda \in \{0,1\}$. La trace de p est donc une somme de 0 et de 1, c'est un entier naturel.

$Tr(S) = Tr(A) + \sqrt{2}Tr(B) + \sqrt{3}Tr(C)$ par linéarité.

On veut $\sqrt{2}Tr(B) + \sqrt{3}Tr(C) \in \mathbb{N}$, avec $Tr(B) \in \mathbb{N}$ et $Tr(C) \in \mathbb{N}$. Montrons que ce n'est possible qu'avec $Tr(B) = Tr(C) = 0$:

Soit $(a,b,c) \in N^3 / a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$.

En élevant au carré, on a : $2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = c^2 \Leftrightarrow 2ab\sqrt{6} = c^2 - (2a^2 + 3b^2)$

Le terme de droite est un entier relatif, comme $\sqrt{6}$ est irrationnel il faut que $2ab$ soit nul pour vérifier l'égalité. Mais si $a = 0$, on a $b\sqrt{3} = c$ et donc forcément b et c doivent être nuls car $\sqrt{3}$ est irrationnel. De même si $b = 0$. Conclusion : $(a,b,c) = (0,0,0)$, et donc $Tr(B) = Tr(C) = 0$.

Les matrices B et C sont donc des projecteurs sur le vecteur nul, ce sont des matrices nulles.

La réciproque est triviale, si B et C sont nulles, $S = A$ donc S est idempotente.

Exercice n° 2

Question 1 : $\deg(f(P)) \leq \deg(P)-1$ car on perd le terme dominant. En effet, en posant $P(X)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$, on a $P(X+1)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$ et le coefficient devant X^{n-1} est dans les deux cas p_{n-1}.

De même, $\deg(f^2(P)) \leq \deg(f(P))-1 \leq \deg(P)-2$, et par une récurrence immédiate : $\deg(f^k(P)) \leq \deg(P)-k, \forall k \in \{0,...,n-1\}$.

Or le degré de P est au plus $n-1$ donc $\deg(f^{n-1}(P)) \leq 0$. Ainsi, $f^{n-1}(P)$ est un polynôme constant ou nul, donc $f^n(P)$ est le polynôme nul.

Question 2 : Montrons par récurrence la relation demandée :

C'est trivialement vrai pour $r=0$, il reste à montrer l'hérédité :

$$f^{r+1}(P)(X)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k} f(P(X+k))=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}(P(X+k+1)-P(X+k))$$

$$=\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{r-k+1}\binom{r}{k-1}P(X+k)-\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}P(X+k)$$

$$=(-1)^{r+1}\binom{r}{0}P(X)+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-k+1}\left(\binom{r}{k-1}+\binom{r}{k}\right)P(X+k)+(-1)^0\binom{r}{r}P(X+r+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^{r+1-k}\binom{r+1}{k}P(X+k)$$, car $\binom{r}{k-1}+\binom{r}{k}=\binom{r+1}{k}$, de plus $\binom{r}{0}=\binom{r+1}{0}=1$, et $\binom{r}{r}=\binom{r+1}{r+1}=1$

La formule est donc démontrée.

On a donc :

$$\forall X \in R, \quad 0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$$

$$(-1)^{n+1}P(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(X+k)$$

$$P(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}P(X+k)$$

C'est la formule demandée, avec $a_k=(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice n° 3

Question 1 :

On a : $u(e_i)=\sum_{j=1}^{n}<u(e_i),f_j>f_j$

Donc $\|u(e_i)\|^2=\sum_{j=1}^{n}<f_j,u(e_i)>^2$

Question 2 :

Ainsi, $A=\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2=\sum_{i=1}^{n}<u(e_i),u(e_i)>$

En appelant u^* l'adjoint de u (il existe et est unique puisque $u\in L(E)$) :

$$A=\sum_{i=1}^{n}<e_i,u^*\circ u(e_i)>\quad =Tr(u^*\circ u)$$

Exercice n° 4

Question 1 :

« $\Leftarrow$ » : $B(f(x),f(x))=B(x,x)\Leftrightarrow q(f(x))=q(x)\Rightarrow f\in G$

« $\Rightarrow$ » : $B(f(x),f(y))=\frac{1}{2}(q(f(x)+f(y))-q(f(x))-q(f(y)))$

$=\frac{1}{2}(q(f(x+y))-q(f(x))-q(f(y)))$ par linéarité de f

$=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$ car $f\in G$

$=B(x,y)$

Question 2 :

- $q(f \circ g(x)) = q(g(x))$ car $f \in G$
  $= q(x)$ car $g \in G$
  donc $f \circ g \in G$

- $q(Id(x)) = q(x) \Rightarrow Id \in G$

- $Ker(f) = \{x / f(x) = 0\}$, $x \in Ker(f) \Rightarrow q(f(x)) = q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ car q n'est pas dégénérée.

f est un endomorphisme de R^n, la dimension est finie, f est injective (car le noyau est réduit à l'élément nul), donc f^{-1} existe.
$q(f \circ f^{-1}(x)) = q(x) = q(f^{-1}(x))$ car $f \in G$
Donc $f^{-1} \in G$
$(G,\circ)$ est un sous groupe de $GL(R^n)$

Question 3 :

On a $f(x) = AX$ et $q(x)={}^tXMX$, d'où : ${}^tX{}^tAMAX={}^tXMX \ \forall X$, par définition de $f \in G$.

Cela implique que ${}^tAMA = M$.
Comme A et M sont des matrices carrées, $(Det(M))(Det(A))^2 = DetM$.
D'où $DetA = 1$ ou -1 car $(Det(M)) \neq 0$.

Question 4 :

$$q(f(e_4)) = q\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix} = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}^2$$

$q(f(e_4)) = q(e_4) = -1$
D'où $a_{44}^2 = 1 + a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 \geq 1$
${}^tAMA = M \Rightarrow {}^tAM = MA^{-1} \Rightarrow M^{-1}\,{}^tAM = A^{-1}$

Or ici $M^{-1} = M$ car $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et on voit que $M^2 = I_4$.

D'où $A^{-1} = M\,{}^tAM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$

Exercice n° 5

Question 1 : Montrons que $\varphi^{-1}(H) = \{n \in Z / g^n \in H\}$ est un sous-groupe de $(Z,+)$:

- $0 \in \varphi^{-1}(H)$ car $g^0 = e_G$, où e_G représente l'élément neutre pour la multiplication. H étant un groupe, il contient e_G.
- $\forall (m,n) \in (\varphi^{-1}(H))^2$, $g^{m+n} = g^m g^n \in H$ car g^m et g^n appartiennent à H, stable par multiplication interne. D'où $m+n \in \varphi^{-1}(H)$.
- $\forall n \in \varphi^{-1}(H)$, $-n \in \varphi^{-1}(H)$ car $g^n g^{-n} = g^0 = e_G$, donc $g^{-n} \in H$ en tant qu'inverse de g^n.

Donc $\varphi^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $(Z,+)$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in N$ tel que $\varphi^{-1}(H) = sZ$.
Montrons rapidement ce résultat : soit $a \in N$.

- $0 \in A$, par existence de l'élément neutre pour l'addition.
- $\forall n \in N^*, na \in A$ car l'addition est interne.
- $\forall n \in N^*, -na \in A$ par existence de l'inverse pour l'addition.

Cela nous donne l'inclusion dans un sens, pour la réciproque il suffit de noter que l'addition dans aZ est associative, et que donc $(aZ,+)$ est un groupe.

Soit r l'ordre du groupe G :
$\varphi^{-1}(H) \supset \varphi^{-1}(\{e_G\}) = rZ$. Donc $rZ \subset sZ$, on en conclut que s divise r.

Question 2 : G est engendré par $\{g\}$ donc $g_0 \in G$, $\exists k \in N / g_0 = g^k$ donc φ est surjective.

On a trivialement que $\varphi(\varphi^{-1}(H)) \subset H$, montrons l'autre inclusion : soit $h \in H$, on veut qu'il existe n_0 tel que $n_0 \in \varphi^{-1}(H)$ et $h = g^{n_0}$. Or comme H est inclus dans G et que φ est surjective, l'existence de ce n_0 est assurée, et il appartient bien à $\varphi^{-1}(H)$ par définition de cet ensemble. On a donc : $H = \varphi(\varphi^{-1}(H))$.

Question 3 : $H = \varphi(sZ) = \{g^{sn} / n \in Z\}$. Les sous-groupes de G sont donc les groupes engendrés par $\{g^s\}$, avec s divisant r.