ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Préambule : Le sujet est composé de 5 exercices indépendants, que le candidat pourra traiter dans l'ordre de son choix.

Dans l'ensemble du sujet, N désignera l'ensemble des entiers naturels, Z celui des entiers relatifs, R celui des nombres réels, et $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes d'un ensemble E .

Exercice n° 1

Soit $M_n(R)$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n et à coefficients dans R .

Soient A, B, C trois matrices de $M_n(R)$ idempotentes (une matrice X est idempotente si et seulement si elle vérifie $X = X^2$).

Montrer que :

$$S = A + \sqrt{2}B + \sqrt{3}C \text{ est idempotente } \Leftrightarrow B = C = 0$$

Indications : on pourra montrer préalablement que les valeurs propres d'un projecteur sont comprises dans l'ensemble $\{0,1\}$, et que sa trace est toujours un entier naturel.

Exercice n° 2

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soit $R^{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients réels.

Soit f l'endomorphisme de $R^{n-1}[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini ainsi :

$$f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Question 1 : Montrer que $f^n(P)$ est le polynôme nul quel que soit le polynôme P.

Question 2 : Montrer que :

$\forall r \in \{0,...,n\}, f^r(P)(X) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} P(X+k)$, où $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}$ désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi r. En déduire qu'il existe une suite de réels $(a_k)_{1 \le k \le n}$ tels que :

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(X+k)$$

Exercice n° 3

Soient $(e_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ et $(f_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ deux bases orthonormées de E, espace vectoriel euclidien, et soit $u \in L(E)$. On pose $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} < u(e_i), f_j >^2$

Question 1 : Montrer que $\|u(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} < f_j, u(e_i) >^2$

Question 2 : En déduire que A ne dépend ni des $(e_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ ni des $(f_i)_{i \in \{1,...,n\}}$. L'exprimer en fonction de u.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice n° 4

Soient B une forme bilinéaire symétrique sur R^n et q la forme quadratique associée (telle que $\forall x \in R^n$, $q(x) = B(x,x)$).

Soit $G = \{f \in L(R^n) / q(f(x)) = q(x), \forall x \in R^n\}$.

Question 1 : Montrer que $f \in G \Leftrightarrow \forall (x,y) \in R^n \times R^n, B(f(x), f(y)) = B(x,y)$.

Question 2 : Préciser la structure de (G, o), 'o' représentant l'opérateur de composition de l'espace des fonctions.

Question 3 : Soient $n=4$, $(e_i)_{1\le i\le 4}$ la base canonique de R^4, $q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_4{}^2$,

$f\in G$ et $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ sa matrice dans la base canonique. Appelons aussi M la matrice de

q dans cette base, et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Calculer le déterminant de A.

Question 4 : Montrer que $a_{44}{}^2\ge 1$ et déterminer A^{-1}.

Exercice n° 5

On se propose ici de déterminer les sous-groupes d'un groupe cyclique.

On rappelle qu'un groupe cyclique peut s'écrire sous la forme $G=\{e_G, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$, avec $g^n=e_G$ (élément neutre pour la loi considérée). n est alors appelé « ordre » du groupe G, et g « générateur » du groupe G.

Soient $(G,.)$ un groupe cyclique, H un sous-groupe non vide quelconque de ce groupe, g un générateur de G et :

$$\varphi:\begin{cases}Z\to G\\ n\mapsto g^n\end{cases}$$

Question 1 : Montrer qu'il existe $s\in N$ tel que $\varphi^{-1}(H)=sZ$, et que s divise l'ordre du groupe G.

Question 2 : Montrer que $H=\varphi(\varphi^{-1}(H))$.

Question 3 : Déterminer les sous-groupes de G.