AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice

1. On a

$$D_n = \begin{vmatrix} u+v & uv & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & u+v & uv & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & uv & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & u+v & uv \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & u+v \end{vmatrix}.$$

   On développe par rapport à la première colonne, pour obtenir

$$D_n = (u+v)D_{n-1} - uvD_{n-2}.$$

2. On vérifie que $D_n = \sum_{k=0}^{n} u^k v^{n-k}$.

Problème

Partie 0

1. Le logarithme népérien est deux fois dérivable, de dérivée seconde négative ($x \mapsto -1/x^2$), donc il est concave.
2. On en déduit que

$$\log(m_g) = \frac{1}{n}(\log x_1 + \ldots + \log x_n) \leq \log\left(\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)\right) = \log(m_a),$$

   d'où le résultat par croissance de la fonction exponentielle.

3. Pour tout $x > -1$, $\log(1+x) \leq x$. Donc pour tout entier naturel n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \leq \exp(n/n) = e,$$

toujours par croissance de la fonction exponentielle.

Partie I

1. Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique de la question 0.2. appliquée à
$$x_k = \alpha_k\beta_k.$$

2. On intervertit l'ordre de sommation
$$\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{k} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j \leq \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j\alpha_j\beta_j.$$

3. Avec ce choix particulier de β_n on a

   (a) $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$. Donc la série de terme général γ_n/n, $n \in \mathbb{N}^*$, est bien convergente.

   (b) Son reste vaut $\Gamma_k = \frac{1}{k}$, où on a utilisé le fait que $\frac{\gamma_n}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et un résultat de sommes téléscopiques.

4. On a donc

   (a) $\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j\alpha_j\beta_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\beta_j}{j} = \sum_{j=1}^{n}(1+1/j)^j\alpha_j \leq e\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$. Puisque la série $\sum \alpha_j$ est convergente, il en est de même de la série $\sum U_k$.

   (b) On déduit directement une majoration de sa somme par
$$e\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j.$$

Partie II

Propriété

$$L_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ L_n \geq 1, \ L_n^2 \leq L_{n+1} L_{n-1}. \tag{1}$$

1. La propriété (1) s'obtient pour la suite ($L_n = n!$) en partant de l'inégalité triviale $n \leq n+1$.
   La suite identiquement égale à 1 vérifie trivialement la propriété (1).

2. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} \geq \frac{L_n}{L_{n-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_1}{L_0} = L_1 \geq 1,$$

   ce qui montre que cette suite est nécessairement croissante.

3. En multipliant les termes de gauche et les termes de droite de la suite d'inégalités suivantes

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k}} \geq \ldots \geq \frac{L_k}{L_{k-1}} \geq \ldots \geq \frac{L_1}{L_0},$$

   on obtient bien

$$\frac{L_n}{L_{n-k}} \geq L_k.$$

4. Par simplifications successives, on a

$$v_1 v_2 \ldots v_n = \frac{L_0}{L_1}\frac{L_1}{L_2} \ldots \frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{1}{L_n} = u_n^n.$$

5. On a

   (a) $v_{n+1}/v_n \leq 1$ d'après (1), donc (v_n) est décroissante,

   (b) et

$$\begin{aligned} u_{n+1}/u_n &= (v_1 v_2 \ldots v_n v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} / (v_1 v_2 \ldots v_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= (v_1 v_2 \ldots v_n)^{\frac{-1}{n(n+1)}} (v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \leq (v_{n+1})^{\frac{-1}{n+1}} (v_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = 1, \end{aligned}$$

   par décroissance de (v_n). Donc (u_n) est décroissante.

6. On applique directement la décroissance de (v_n).

7. Immédiat d'après la question 4.

8. L'implication $\Longleftarrow$ se déduit directement de la question précédente. On démontre la réciproque par application de la Partie I: avec $\alpha_n = v_n$ (qui définit bien une série convergente par hypothèse) la suite $U_n = u_n$ (d'après la question 4 de la partie présente) est bien convergente.

Partie III

1. Pour $n = 0$, on a $c_0 = f(y)$. Ensuite, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'égalité se déduit par n dérivations successives, en remarquant que f est supposée de classe C^∞.

2. Montrons que $R(f)$ est ouvert. Soit $y \in R(f)$: pour tout n, $f^{(n)}(y) = 0$, soit $c_n = 0$. Par définition d'une fonction analytique, il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de y sur lequel f s'écrit

$$\forall x \in \mathcal{V} \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n = 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{V} \subset R(f)$, donc $R(f)$ est ouvert.
Pour montrer que $R(f)$ est fermé, nous allons prouver que son complémentaire est ouvert. Soit $y \in \mathbb{R} \backslash R(f)$. Il existe au moins une dérivée qui ne s'annule pas en y. Soit n_0 le plus petit ordre. Alors il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de y sur lequel f s'écrit

$$\forall x \in \mathcal{V} \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n = f^{(n_0)}(y)(x-y)^{n_0} + o\left((x-y)^{n_0}\right),$$

avec $f^{(n_0)}(y) \neq 0$. Donc il existe un voisinage de y dans $\mathcal{V}$ sur lequel f ne s'annule pas, donc qui est inclus dans $\mathbb{R} \backslash R(f)$. Ce qu'on souhaitait montrer.

3. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et ϕ. Donc $R(f)$ est soit $\mathbb{R}$, soit ϕ. Si $R(f) \neq \phi$, on déduit que $R(f) = \mathbb{R}$, ie la fonction f est identiquement nulle.

Partie IV

1. Cf question 1. Partie I.

2. Soient α et β comme dans la définition de $E(L)$. On utilise la formule de Taylor suivante: pour tout y, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de y tel que pour tout x de $\mathcal{V}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + o(x-y)^n.$$

Si on choisit x dans $\mathcal{V}$ qui vérifie la condition supplémentaire $\rho_x = \beta\,|x-y| < 1$, alors la série dont la somme partielle est la somme ci-dessus est une série convergente car

$$\left|\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k\right| \leq \alpha\beta^k\,|x-y|^k = \alpha\rho_x^k.$$

Sur ce voisinage de y, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k,$$

ce qui achève la preuve que f est analytique.

3. Ce résultat s'obtient par application directe de la Partie III.

4. Les fonctions f et g sont de classe C^∞ dans $E(L)$, donc il existe $\alpha, \beta, \lambda, \mu > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \alpha\beta^n L_n,\ \left|g^{(n)}(x)\right| \leq \lambda\gamma^n L_n.$$

   (a) Stabilité par addition

$$\left|(f+g)^{(n)}(x)\right| \leq \left|f^{(n)}(x)\right| + \left|g^{(n)}(x)\right| \leq (\alpha\beta^n + \lambda\gamma^n)\,L_n \leq AB^nL_n,$$

   avec $A = \alpha + \lambda$ et $B = \beta + \mu$.

   (b) Stabilité par multiplication

$$\begin{aligned}\left|(fg)^{(n)}(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \alpha\beta^k L_k \lambda\gamma^{n-k}L_{n-k} \leq \alpha\lambda L_n \sum_{k=0}^{n}\beta^k\gamma^{n-k},\end{aligned}$$

où on a utililisé un résultat de la Partie II. Avec $A = \alpha\lambda$ et $B = \beta + \gamma$, on obtient bien $\left|(fg)^{(n)}(x)\right| \leq AB^n L_n$.

(c) Stabilité par translatation et homothétie

$$\left|h^{(n)}(x)\right| = \sigma^n \left|f^{(n)}(\mu + \sigma x)\right| \leq \alpha(\beta\sigma)^n L_n.$$

5. Si f est à support compact, alors il existe un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f s'annule, donc sur lequel toutes les dérivées de f s'annulent. Donc $R(f) \neq \phi$. Par hypothèse, f est donc identiquement nulle.