ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants. Le problème est constitué de cinq parties dépendantes. Toutefois, les résultats non démontrés d'une partie pourront être utilisés dans les questions suivantes.

Exercice

Soit D_n le déterminant d'ordre n de terme général $d_{i,j}$ défini par $d_{i,i} = u+v$, $d_{i,i+1} = uv$, $d_{i+1,i} = 1$, et $d_{i,j} = 0$ sinon, où u et v sont deux nombres réels.

1. Etablir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 3$.
2. En déduire D_n.

Problème

Partie 0

Les résultats de cette partie seront utiles pour la suite.

1. Montrer que la fonction logarithme népérien est concave.

2. Soient x_1, $x_2, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs. Soit m_a leur moyenne arithmétique et m_g leur moyenne géométrique. On rappelle que

$$m_g = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

   Montrer que $m_g \leq m_a$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

Partie I

Soient deux suites réelles à termes strictement positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que la série de terme général α_n est convergente. On définit les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$U_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1/n} \text{ et } \gamma_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \beta_k\right)^{-1/n}.$$

1. Montrer que

$$\frac{U_n}{\gamma_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \gamma_k.$$

   Indication: on pourra utiliser un résultat de la **Partie 0**.

2. On fait l'hypothèse ici que la série de terme général γ_n/n, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente. Soit Γ_k le reste de cette série, autrement-dit

$$\Gamma_k = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n/n.$$

   Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \alpha_k \beta_k.$$

3. On fait le choix particulier de β_n suivant

$$\beta_n = (n+1)^n / n^{n-1}.$$

   (a) Cette suite définit-elle une suite γ_n conforme à l'hypothèse faite à la question précédente?

   (b) Calculer Γ_k.

4. On s'intéresse à la série de terme général U_n.

   (a) Montrer que cette série est convergente.

   (b) Donner une majoration de sa somme en fonction de la somme de la série de terme général α_n.
   Indication: on pourra utiliser un résultat de la **Partie 0**.

Partie II

Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie

$$L_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; L_n \geq 1, \; L_n^2 \leq L_{n+1}L_{n-1}. \tag{1}$$

1. Donner deux exemples de suites qui vérifient la propriété (1).

2. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone?

3. Montrer que pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n,

$$L_k L_{n-k} \leq L_n.$$

4. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = L_n^{-1/n}, \; n \geq 1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_n = L_{n-1}/L_n, \; n \geq 1. \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de $v_1, v_2, \ldots$ et v_n.

5. Montrer que

   (a) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone,

   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq (v_1 v_2 \dots v_n)^{1/n}$.

7. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geq v_n$.

8. Etablir l'équivalence suivante

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ est convergente } \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ est convergente }.$$

   Indication: on pourra utiliser les résultats de la **Partie I**.

Partie III

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est analytique dans $\mathbb{R}$ si et seulement si c'est une fonction développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$. Autrement dit, f est analytique dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout point y de $\mathbb{R}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de y et une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{V} \,:\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n.$$

On admet qu'une fonction analytique dans $\mathbb{R}$ est toujours de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On suppose dans cette partie que la fonction f est analytique dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n

$$c_n = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}.$$

2. Soit l'ensemble

$$R(f) \quad = \quad \left\{x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\, f^{(n)}(x) = 0\right\}.$$

   Montrer que $R(f)$ est à la fois une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}$.

3. En déduire que f satisfait la propriété suivante

$$R(f) \neq \phi \implies f \equiv 0. \tag{2}$$

Partie IV

Soit $L = (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (1). Toutes les fonctions f considérées dans cette partie sont supposées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞.

On définit l'ensemble de fonctions suivant:

$$E(L) = \left\{ f \mid \exists\alpha > 0\,, \exists\beta > 0 : \forall x \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N} : \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \alpha\beta^n L_n \right\},$$

où les constantes α et β dépendent de f.

Dans les questions 1 à 3, on suppose que $L_n = n!$.

1. Montrer que cette suite (L_n) vérifie la propriété (1).

2. Montrer que
$$f \in E(L) \implies f \text{ est analytique.}$$

3. Montrer que
$$f \in E(L) \implies f \text{ vérifie (2).}$$

   On revient au cas général où $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1).

4. Soient f et g de classe C^∞ dans $E(L)$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R} : \ h(x) = f(\mu + \sigma x),$$
avec μ et σ deux réels. Montrer que les fonctions suivantes sont aussi éléments de $E(L)$

   (a) $f + g$,

   (b) fg,

   (c) h.
   Indication: on pourra utiliser les résultats de la **Partie II**.

5. On définit le support de f comme l'adhérence du complémentaire de $R(f)$. On suppose que $E(L)$ vérifie l'implication suivante

$$\forall f \in E(L),\ R(f) \neq \phi \implies f \equiv 0.$$

Montrer que si la fonction f est à support compact, alors elle est identiquement nulle.