ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1 Problème d'analyse

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle "partition de l'entier n en k éléments" la donnée de k entiers naturels $(a_1, \dots, a_k)$ tels que $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on note $p_k(n)$ le nombre de partitions de l'entier n en k éléments :

$$p_k(n) = Card\{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k : a_1 + \cdots + a_k = n\}.$$

où $Card$ est la notation pour le cardinal d'un ensemble (c'est-à-dire le nombre d'éléments composant un ensemble). On note également

$$r_k(n) = Card\{(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{N}^k : b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + kb_k = n\}.$$

Enfin, on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\mathcal{R}_k$ de la variable complexe z par

$$\mathcal{R}_k(z) = \sum_{n \geq 0} r_k(n) z^n.$$

On admet que pour tous nombres complexes α et z tels que $|\alpha z| < 1$

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)^k} = \sum_{n \geq 0} C_{n+k-1}^{k-1} \alpha^n z^n,$$

où $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ représente le k-ième coefficient binomial d'ordre n.

1.1 Partitions entières pour $k = 2, 3$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $r_k(n) \leq \dfrac{p_k(n)}{k-1}$.
2. Calculer $r_2(n)$, $p_2(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

4. En utilisant l'égalité

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3) = 1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6,$$

valable pour tout complexe z, montrer que pour tout $n \geq 6$, on a

$$r_3(n) - r_3(n-1) - r_3(n-2) + r_3(n-4) + r_3(n-5) - r_3(n-6) = 0.$$

5. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{17}{72}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-jz} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-j^2z}.$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_3(n) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2\cos(2\pi n/3)}{9}.$$

7. En déduire que $r_3(n) = E\left[\dfrac{(n+3)^2}{12}\right]$ où $E[x]$ est l'entier le plus proche de x, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $|x - n| \leq |x - p|$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Par exemple, $E[6.8] = 7$ *et* $E[2.5] = 2$.

1.2 Séries entières rationnelles

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soit $S(z)$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$:

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{pour } |z| < r.$$

On admet le théorème suivant :
La série entière $S(z)$ coïncide avec une fonction rationnelle $F(z)$ de la forme $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où P et Q sont deux fonctions polynômes telles que Q ne s'annule pas dans le disque ouvert $D(0, r)$ de rayon r, lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}^{q+1}$ (non tous nuls) tels que pour tout $n \geq d$, $\lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \cdots + \lambda_q a_{n+q} = 0$.

On dit alors que la fonction rationnelle est définie par :
– les conditions initiales : c'est-à-dire la donnée de $q + d$ nombres $(a_0, a_1, \ldots, a_{d+q-1})$
– et la relation de récurrence linéaire donnée par les $q + 1$ coefficients $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$.

On admet que deux fonctions rationnelles sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Elles sont donc égales si et seulement si les conditions initiales et la relation de récurrence sont identiques.

8. Soit $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fonction rationnelle telle que Q ne s'annule pas dans dans le disque ouvert $D(0, r)$, avec $r > 0$. Ses conditions initiales sont constituées de $q+d$ nombres. Montrer qu'il existe une fonction polynôme S de degré $d - 1$ tel que
$$F(z) = S(z) + z^d G(z) \text{ pour tout } z \in D(0, r),$$
où G est une fonction rationnelle possédant la même relation de recurrence que F, mais dont les conditions initiales ne sont constituées que de q nombres.

La question précédente permet de se limiter au cas $d = 0$. Dans toute la suite du problème, on considérera qu'on est toujours dans ce cas et on notera encore F une telle fonction rationnelle. Les conditions initiales permettent alors de définir la famille de polynômes suivante
$$P_0(X) = 0 \text{ et pour tout } k \in \{1, \ldots, q\}, \quad P_k(X) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n.$$

On note également $R(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i}$ le polynôme associé à la relation de reccurence.

9. Montrer que $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i} P_i(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à q.
10. Montrer que $\lambda_q \left(P_q(X) - F(X)\right) = \lambda_0 X^q F(X) + \displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} \left(\lambda_j X^{q-j} \left[F(X) - P_j(X)\right]\right)$.
11. En déduire que $F(X) = Q(X)/R(X)$.
12. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{C}^r$ et $(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que
$$R(X) = (1 - \xi_1 X)^{m_1} \ \cdots \ (1 - \xi_r X)^{m_r}.$$
13. A l'aide d'une décomposition en éléments simples de Q/R, montrer qu'il existe une famille $\left((b_{i,j})_{j=1,\ldots,m_i}\right)_{i=1,\ldots,r}$ telle que
$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} b_{i,j} C_{n+j-1}^{j-1} \xi_i^n.$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Afin de trouver un équivalent de a_n, on ne conserve de la somme précédente que la valeur ξ_i de plus grand module et le terme polynomial de plus haut degré (c'est-à-dire pour $j = m_i$). Dans le cas de plusieurs racines de même module maximal, on ne garde que celle de plus grande multiplicité.

14. Soit i_0 l'indice du ξ_i de plus grand module (ou de plus grande multiplicité en cas de plusieurs racines de même module maximal). Montrer qu'un équivalent de a_n s'écrit sous la forme suivante

$$a_n \sim b_{i_0,m_{i_0}} \xi_{i_0}^n \frac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!}.$$

15a. On considère la fonction rationelle $\tilde{F}$ définie par les conditions initiales (1,1,2,3,4,5) et la relation de récurrence (-1,1,1,0,-1,-1,1). Trouver une expression explicite de la fonction $\tilde{F}$ en fonction de $\mathcal{R}_3$.

15b. En utilisant la question 14, montrer qu'un équivalent du n-ième coefficient de $\tilde{F}$ (noté $a_n(\tilde{F})$) est donné par

$$a_n(\tilde{F}) \sim \frac{n^2}{12}$$

Ce résultat est-il en conformité avec le résultat de la question 8 ?

1.3 Partitions entières pour k quelconque

16. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, $\mathcal{R}_k(X) = \dfrac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}$ puis

$$\mathcal{R}_k(z) = \frac{1}{1-z} \cdots \frac{1}{1-z^k}.$$

17. En déduire que

$$r_k(n) = r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + r_{k-1}(n-2k) + \cdots$$

où on utilise la convention : $r_k(n-ik) = 0$ si $n < ik$.

18. En utilisant le fait que la fonction $x \mapsto x^{k-1}$ est convexe, montrer que pour tout $k \geq 2$

$$x^{k-2} \geq \frac{1}{k(k-1)} \left(x^{k-1} - \max\left\{ (x-k)^{k-1} ; 0 \right\} \right), \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

19. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$r_k(n) \geq \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

2 Problème d'algèbre linéaire

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ de la forme

$$q(x) = \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E, on note $U \oplus V$ l'espace qui est la somme directe de U et V, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $U + V$ sous la condition $U \cap V = \{0\}$.

2.1 Diagonalisation

1. Soit q une forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ (appelée forme polaire de q) telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout x de E. Vérifier en particulier que
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)).$$

On dit que la forme bilinéaire symétrique φ est positive (resp. définie positive) si, pour tout x de E, $\varphi(x, x) \geq 0$ (resp. si, pour tout $x \neq 0$, $\varphi(x, x) > 0$). On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=1,\ldots,n}$.

2. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = {}^t P \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P.$$

Dans la suite du problème, on appelle rang de la forme quadratique q (associée à la forme bilinéaire symétrique φ) le rang de la matrice de φ dans une base de E. On dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour φ (ou de façon équivalente pour la forme quadratique associée q) si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Etant donnés x et y deux vecteurs de E, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\varphi(x, y)$ en fonction des x_i et des y_i.
4. Soit f_1 un vecteur de E tel que $\varphi(f_1, f_1) \neq 0$. On note $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie pour tout x de E par $\varphi_1(x) = \varphi(f_1, x)$, et $F = \ker(\varphi_1)$. Montrer que $E = \mathbb{R}f_1 \oplus F$ où $\mathbb{R}f_1$ désigne le sous espace vectoriel de E de dimension 1 engendré par f_1.
5. En déduire que toute forme bilinéaire symétrique sur E admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.
6. Déterminer une telle base pour la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par
$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$
(On pourra commencer par préciser la forme bilinéaire symétrique φ associée à q et la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$).
7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E et deux entiers p et q tels que

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & -J_q & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

où J_r désigne une matrice identité de taille $r \times r$.

2.2 Sous-espaces totalement isotropes

On appelle noyau de la forme bilinéaire symétrique φ (noté ker (φ)) le noyau de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ dans une base $\mathcal{B}$ quelconque. On dit que φ est non-dégénérée si ker $(\varphi) = \{0\}$.

On dit que la forme bilinéaire φ est positive (resp. négative) si pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geq 0$ (resp. $\varphi(x, x) \leq 0$). On dit que la forme bilinéaire φ est définie si elle vérifie la proposition suivante

$$\varphi(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

On appelle signature de φ le couple d'entiers $(n_+; n_-)$ où n_+ est la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel F de E tel que la restriction de φ à F soit définie positive, et n_- la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel G de E telle que la restriction de φ à G soit définie négative.

Dans les questions suivantes, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthogonale pour φ, et $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice de φ dans $\mathcal{B}$, avec $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, p$, $\alpha_i < 0$ pour $i = p+1, \ldots, p+q$, et $\alpha_i = 0$ sinon.

8a. Montrer que $p \leq n_+$.

8b. Soit F_+ un sous-espace vectoriel de E de dimension n_+ tel que la restiction de φ à F_+ (notée $\varphi|_{F_+ \times F_+}$) soit définie positive, et $G =$ Vect $(e_{p+1}, \ldots e_n)$. Montrer que F_+ et G sont en somme directe. En déduire que $n_+ \leq p$.

8c. En déduire le théorème de Sylvester : Dans toute base orthogonale de E, la matrice de φ possède n_+ éléments strictement positifs et n_- éléments strictements négatifs.

9. Exprimer le rang de φ en fonction de sa signature, et déterminer la signature d'une forme bilinéaire définie positive.

On appelle cône isotrope de la forme quadratique q l'ensemble

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

$$C_q = \{x \in E, q(x) = 0\}.$$

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour la forme bilinéaire symétrique φ si $\varphi(x, y) = 0$. Pour A une partie de E, on appelle orthogonal de A selon φ l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in E, \forall x \in A \quad \varphi(x, y) = 0\}.$$

10a. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

10b. Montrer que pour toute partie F de E, on a

$$F \subset F^{\perp\perp}.$$

10c. Montrer que pour A et B deux parties de E on a l'implication suivante

$$A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

On appelle sous-espace totalement isotrope (SETI en abrégé) un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout x de F, $q(x) = 0$. On appelle SETI maximal (SETIM en abrégé) un sous espace totalement isotrope G vérifiant la propriété : si F est un SETI contenant G, alors $F = G$ (G est maximal pour l'inclusion).

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soit F un SETI.

11a. Montrer que $F \subset F^{\perp}$.

11b. Montrer que $\dim F \leq n - \dfrac{r}{2}$, où r est le rang de la forme quadratique q.

11c. Montrer que F est inclus dans un SETI maximal.

On suppose que φ est non dégénérée. Etant donnés deux SETIM G_1 et G_2, on note $F = G_1 \cap G_2$, S_1 un supplémentaire de F dans G_1 (de sorte que $F \oplus S_1 = G_1$) et S_2 un supplémentaire de F dans G_2 (de sorte que $F \oplus S_2 = G_2$).

12a. Montrer que $S_1 \cap S_2^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2 = \{0\}$. En déduire que $\dim G_1 = \dim G_2$.

12b. Tous les SETIM ayant donc la même dimension, on appelle indice de la forme quadratique q la dimension commune de tous les SETIM. Calculer l'indice de q en fonction de sa signature $(n_+; n_-)$.