AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Etant donné un nombre réel positif r, on note $D(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ et $\bar{D}(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

On appelle *série entière* associée à la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute série de fonction de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, où z est une variable complexe. On rappelle le lemme suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entiere, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors

(i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(ii) Pour tout nombre réel r tel que $0 < r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\bar{D}(r)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est alors défini par

$$R = \sup\{r \geq 0, \text{ la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée }\}.$$

On appelle alors *disque de convergence* le disque $D(R)$.

Le but du problème est d'étudier sur quelques exemples le comportement d'une série entière au voisinage du cercle $C(R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$.

1.1 Préliminaires

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque $D(1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

On note de plus $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. En remarquant que $a_n = R_{n-1} - R_n$, montrer que pour tout $z \in D(1)$,

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) - S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n - 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(z^{n+1} - z^n) = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n. \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \Delta$. On note $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$. Montrer que

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$

On a

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}.$$

3. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D(1)$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

Comme la série est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. D'après la première question, pour $|z| < 1$:

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| + \varepsilon|z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n\right)$$

4. Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{z \to 1, z \in \Delta} f(z) = S.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|z-1| < \alpha$, $|z-1|\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| < \varepsilon$, et pour $\rho \leq \cos(\theta_0)$, $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos\theta_0}$. Ainsi, pour $z \in \Delta$ et $|z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$, $|f(z) - S| \leq \varepsilon(1 + 2/\cos\theta_0)$.

5. **Application :** Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

$$\ln(2) = \lim_{z\to 1, z\in\Delta} \ln(1+z) = \lim_{z\to 1, z\in\Delta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1.2 Un théorème Taubérien

Le but des questions suivantes est d'établir une réciproque partielle du résultat précédent.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Pour $x \in]-1,1[$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = S.$$

6. Vérifier que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $(1-x^k) \leq k(1-x)$.

   Pour tout $x \in]0,1[$

$$(1-x^k) = (1-x)(1+x+x\cdots+x^{k-1}) \leq k(1-x)$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]0,1[$,

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0;1[$,

$$S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

   d'où

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k$$

8. Justifier que le réel $M = \sup\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

La suite $(k|a_k|)$ tend vers 0, elle est donc majorée, et une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup qu'on note M. Pour $x = 1 - \dfrac{\varepsilon}{n}$,

$$\begin{aligned}
\left|S_n(x) - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| &\leq \frac{\varepsilon}{n} Mn + (1-x)a_0 \times 0 + \frac{1}{n}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right) x^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\
&\leq M\varepsilon + \frac{1}{n}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right) \frac{1}{1-x} \\
&\leq M\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\left(\sup_{k>n} k|a_k|\right)
\end{aligned}$$

Pour N choisi tel que $\sup\limits_{k>n} k|a_k| < \varepsilon^2$, on a le résultat.

9. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

   D'après les hypothèses, $f(x)$ tend vers S en 1^-. Il existe $N' > N$ tel que pour $n \geq N'$, $\left|f\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geq N'$, $|S_n - S| \leq (M+2)\varepsilon$.

1.3 Un exemple de comportement sur le cercle $C(1)$

On considère dans cette partie la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} z^n$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x. Le but est de montrer que cette série est convergente en tout point du cercle $C(1)$ mais qu'elle n'est nulle part absolument convergente.

10. Dans cette question, on considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On pose $\sigma_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

    (a) On suppose que la suite (σ_n) est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Justifier que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n$$

et en déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k(b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{k} a_m(b_k - b_{k+1}) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n \\ &= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=m}^{n-1} a_m(b_k - b_{k+1}) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} a_m(b_m - b_n) + \sum_{m=1}^{n} a_m b_n = \sum_{m=1}^{n-1} a_m b_m + a_n b_n.\end{aligned}$$

Soit M un majorant de $|\sigma_n|$. La série $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge donc absolument puisque $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M|b_n - b_{n+1}|$. De plus, $\sigma_n b_n$ tend vers 0, d'où le résultat.

(b) On suppose que la suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|\sqrt{n}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} b_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Soit M un majorant de $|\sigma_n/\sqrt{n}|$. La série $\sum \sigma_n(b_n - b_{n+1})$ converge donc absolument puisque $|\sigma_n(b_n - b_{n+1})| \leq M\sqrt{n}|b_n - b_{n+1}|$. De plus, $|\sigma_n b_n| \leq M\sqrt{n}|b_n|$ tend vers 0, d'où le résultat.

11. (a) Etablir que pour tout entier naturel impair p, on a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2.$$

On a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + \sum_{n=(p+1)^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = (-1)^p(2p+1) + (-1)^{p+1}(2p+3) = 2.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et N_0 le plus grand entier tel que $(2N_0+1)^2 \leq N$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

D'après ce qui précède

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{n=(2k+1)^2}^{(2k+3)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2N_0.$$

(c) Etablir :

$$\left|\sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq 8(N_0+1).$$

Comme $(2N_0+1)^2 \leq N < (2N_0+3)^2$,

$$\left|\sum_{n=(2N_0+1)^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq N+1-(2N_0+1)^2 \leq (2N_0+3)^2-(2N_0+1)^2 \leq 8(N_0+1).$$

(d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ est une série convergente.

On applique le résultat de la question 10(b) en remarquant que les sommes partielles de $\sum(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ sont majorées en valeur absolue par $10(N_0+1)$ et $N_0+1 \leq \sqrt{N}$.

12. Dans cette question, θ est un nombre réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$.

(a) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est bornée.

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

(b) Montrer que la série $\sum |c_n - c_{n+1}|$ avec $c_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

Si $n+1 = p^2$ pour un entier naturel p, alors $|c_n - c_{n+1}| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{p^2-1} + \dfrac{1}{p^2}$. Sinon, $p^2 \leq n < n+1 < (p+1)^2$, alors $|c_n - c_{n+1}| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Et les séries de terme général $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{1}{p^2}$ et $\dfrac{1}{p^2-1}$ sont convergentes.

(c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} e^{in\theta}$ est convergente.

On conclut avec la question 10(a) avec $b_n = c_n$ et $a_n = e^{in\theta}$.

13. Conclure.

On a montré que la série est convergente sur tout le cercle. Et elle n'y est évidemment pas absolument convergente.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on cherche à étudier des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une formule de récurrence linéaire afin de trouver une formule simple donnant u_n en fonction de n.

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si μ est une valeur propre d'une matrice M de taille $n \times n$, on note E_μ le sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$ associé à la valeur propre μ, c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $M - \mu I_n$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\mu = \{x \in R^n : Mx = \mu x\} = Ker(M - \mu I_n).$$

2.1 Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite réelle récurrente d'ordre 2 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0, \\ u_1 & = & 1, \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n. \end{array}\right. \tag{$\star$}$$

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.
   $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ et $u_4 = 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Montrer qu'on peut écrire la relation $(\star)$ sous la forme

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = M\ U_n,$$

   où M est l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dira que M est la matrice de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M\ U_n.$$

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M.
   Ce sont les racines de $-X(1-X) - 1 = X^2 - X - 1$. Avec $\Delta = 5$, on trouve $x_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de la matrice M.
   On résoud les systèmes

$$Mu = x_+ u \Leftrightarrow u_2 = x_+ u_1 \text{ et } Mv = x_- v \Leftrightarrow v_2 = x_- v_1.$$

   d'où les vecteurs propres $u = (1, x_+)$ et $v = (1, x_-)$.
5. Identifier une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$D = P^{-1} M P. \tag{1}$$

   On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_+ & x_- \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} x_+ & 0 \\ 0 & x_- \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire
$$M^n P = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ a^{n+1} & b^{n+1} \end{pmatrix}$$
où a et b sont des réels à déterminer.
En élevant la relation précédente à la puissance n, les matrices de passage se simplifient. D'où
$$M^n P = PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_+ & x_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+^n & 0 \\ 0 & x_-^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+^n & x_-^n \\ x_+^{n+1} & x_-^{n+1} \end{pmatrix}.$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule suivante :
$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}.$$
On calcule l'inverse de la matrice P
$$P^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x_- & -1 \\ -x_+ & 1 \end{pmatrix}.$$
D'où
$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+^n & x_-^n \\ x_+^{n+1} & x_-^{n+1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$
Et puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a
$$u_n = x_+^n \times \frac{1}{\sqrt{5}} + x_-^n \times \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

8. En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.
Puisque $|x_+| > |x_-|$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(1+\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\ 2^n}$.

2.2 Suite récurrente d'ordre p

Dans cette partie, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence d'ordre p de la forme :
$$v_{n+p} = \mu_0 v_n + \mu_1 v_{n+1} + \cdots + \mu_{p-1} v_{n+p-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$
où $(\mu_i)_{i=1\ldots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$. De plus, on se donne une condition initiale pour les p premiers éléments de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme
$$v_0 = v^0, v_1 = v^1, \ldots, v_p = v^p, \tag{3}$$
où $(v^0, \ldots, v^p)$ est une autre famille de réels fixée.
Une telle suite possède également une matrice de récurrence $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$V_{n+1} = M\ V_n,$$
avec $V_n = (v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+p-1})^t$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$.

9. Montrer que la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Tout comme dans la première partie, on trouve la forme attendue pour la matrice M.

10. Déterminer le polynôme caractéristique (noté χ_M) de la matrice M.

La matrice M est la matrice compagnon d'un polynôme. On le trouve en développant par rapport à la première colonne.

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - X \end{vmatrix} \\ &= -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -X & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - X \end{vmatrix} + (-1)^p \mu_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -X & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^p \mu_0 - X \times \chi_{M'}(X) \end{aligned}$$

où M' est une autre matrice de la même forme que M. Par récurrence, on trouve $\chi_M(X) = (-1)^p(\mu_0 + \mu_1 X + \cdots + \mu_{p-1} X^{p-1} - X^p)$.

11. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \cdots & t_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{p-1,p-1} & t_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{p,p} \end{pmatrix},$$

où les $t_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, telles que

$$T = P^{-1} M P. \tag{4}$$

Une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ peut se voir comme une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. $\mathbb{C}$ étant un corps algébriquement clos, toute matrice est trigonalisable d'où l'existence des matrices T et P.

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire
$$V_n = PT^n P^{-1} V_0.$$

En élevant T à la puissance n, les matrices de passage se simplifient, et on a la relation voulue.

2.3 Diagonalisation

On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice M définie par
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$
où on rappelle que $(\mu_i)_{i=1\dots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$.

13. Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 qui soit colinéaire à un vecteur de la forme
$$(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \dots, \lambda_1^{p-1}).$$

On note v le vecteur précédent. Il suffit de calculer le produit matrice-vecteur Mv
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^{p-1} \\ \mu_0 + \mu_1\mu_1 + \cdots \mu_{p-1}\mu_1^{p-1} \end{pmatrix}.$$
Et puisque μ_1 est racine de χ_M alors la dernière ligne vaut μ_1^p. Donc $Mv = \mu_1 v$. Ainsi v est un vecteur propre donc il existe bien un vecteur propre qui lui soit colinéaire...

14. Montrer que la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ suivante
$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$
est de rang supérieur ou égal à $p - 1$.
Puisque la matrice est en forme d'escalier, on peut simplifier les lignes une à une. Le rang de la matrice est alors au moins égal à $p - 1$.

15. En déduire que les sous-espaces propres de la matrice M sont tous de dimension 1, c'est-à-dire
$$\text{Pour tout } i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \dim(E_{\lambda_i}) = 1.$$

Par le théorème du rang et la question précédente, la dimension du noyau E_{λ_1} est inférieure à 1. Elle est évidemment supérieure à 1 puisque λ_1 est une valeur propre. Donc $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$. Et idem pour toutes les autres valeurs propres.

Dans la suite de cette partie, on suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes. Et on note D la matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

16. Montrer qu'il existe une matrice de passage P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_p \\ \nu_1^2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu_1^{p-1} & \nu_2^{p-1} & \cdots & \nu_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ une famille de réels à déterminer telle que $D = P^{-1}MP$.
Puisque toutes les valeurs propres sont distinctes, alors on a bien égalité entre la multiplicité d'une valeur propre ($= 1$) et la dimension du sous-espace propre associé ($= 1$). La matrice est donc diagonalisable. Il suffit d'écrire la matrice de passage P dans le bon ordre pour obtenir la forme de la matrice diagonale désirée. D'après les questions précédentes, et puisque les espaces propres sont de dimension 1, les vecteurs propres ont tous la forme donnée à la question 13. Donc la matrice de passage P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

Et la famille $(\nu_i)_{i=1,\ldots,p}$ est en fait la famille $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,p}$.

17. **Application :** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 0, \\ a_1 & = & 1, \\ a_2 & = & 0, \\ a_{n+3} & = & a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & 0, \\ b_1 & = & 0, \\ b_2 & = & 1, \\ b_{n+3} & = & b_{n+2} - b_{n+1} + b_n \end{array} \right. \tag{5}$$

vérifient $a_n = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$ et $b_n = \dfrac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}$ où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière du nombre $n/2$.
Les deux suites ont la même matrice de récurrence

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc $1 - X + X^2 - X^3$. Une racine évidente est $\lambda_3 = 1$. Puis $1 - X + X^2 - X^3 = (1-X)(1+X^2)$. Donc $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Les racines sont toutes différentes donc la matrice est diagonalisable. La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $-4i$ et son inverse est

$$P^{-1} = \frac{1}{-4i} \begin{pmatrix} -i+1 & -(i+1) & -2i \\ -2 & 2 & 0 \\ 1+i & -(1-i) & -2i \end{pmatrix}^t = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & 1+i \\ -(i+1) & 2 & -(1-i) \\ -2i & 0 & -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i^{n+1} \\ -2(-i)^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i^{n+1} - 2(-i)^{n+1} \\ 2i^n + 2(-i)^n \\ 2i^{n+1} + 2(-i)^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $a_n = \dfrac{-2i^{n+1} - 2(-i)^{n+1}}{4} = \dfrac{-2i(i^n - (-i)^n)}{4} = \dfrac{i^n - (-i)^n}{2i}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n+1} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2i & -1-i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i^n + i^{n+1} \\ -(-i)^n + (-i)^{n+1} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i^n + i^{n+1} - (-i)^n + (-i)^{n+1} + 2 \\ -i^{n+1} + i^{n+2} - (-i)^{n+1} + (-i)^{n+2} + 2 \\ i^n - i^{n+1} + (-i)^n - (-i)^{n+1} + 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $b_n = \dfrac{-i^n + i^{n+1} - (-i)^n + (-i)^{n+1} + 2}{4}$.
En particulier si $n = 2p$,

$$b_n = \frac{1}{4}\left((-1)^{p+1} + i(-1)^p + (-1)^{p+1} - i(-1)^p + 2\right) = \frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}.$$

Et si $n = 2p+1$,

$$b_n = \frac{1}{4}\left(i(-1)^{p+1} + (-1)^{p+1} - i(-1)^{p+1} + (-1)^{p+1} + 2\right) = \frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{1-(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}.$$