

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Etant donné un nombre réel positif r , on note $D(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ et $\bar{D}(r) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, où $|z|$ est le module de z .

On appelle *série entière* associée à la suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute série de fonction de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, où z est une variable complexe. On rappelle le lemme suivant :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, alors

- (i) Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- (ii) Pour tout nombre réel r tel que $0 < r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\bar{D}(r)$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est alors défini par

$$R = \sup\{r \geq 0, \text{ la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée } \}.$$

On appelle alors *disque de convergence* le disque $D(R)$.

Le but du problème est d'étudier sur quelques exemples le comportement d'une série entière au voisinage du cercle $C(R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ lorsque $R < +\infty$.

1.1 Préliminaires

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque $D(1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \quad z = 1 - \rho e^{i\theta}\}.$$

On note de plus $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. En remarquant que $a_n = R_{n-1} - R_n$, montrer que pour tout $z \in D(1)$,

$$f(z) - S = (z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

2. Soit $z \in \Delta$. On note $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$. Montrer que

$$\frac{|z - 1|}{1 - |z|} \leq \frac{2}{2 \cos(\varphi) - \rho}.$$

3. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D(1)$

$$|f(z) - S| \leq |z - 1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|}.$$

4. Dédurre des questions précédentes que

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \in \Delta} f(z) = S.$$

5. **Application :** Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

1.2 Un théorème Taubérien

Le but des questions suivantes est d'établir une réciproque partielle du résultat précédent.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On note

$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Pour $x \in]-1, 1[$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et on suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = S.$$

6. Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $(1 - x^k) \leq k(1 - x)$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]0, 1[$,

$$|S_n - f(x)| \leq (1 - x) \sum_{k=0}^n k |a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k |a_k|}{n} x^k.$$

8. Justifier que le réel $M = \sup\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leq (M+1)\varepsilon.$$

9. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

1.3 Un exemple de comportement sur le cercle $C(1)$

On considère dans cette partie la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} z^n$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre x . Le but est de montrer que cette série est convergente en tout point du cercle $C(1)$ mais qu'elle n'est nulle part absolument convergente.

10. Dans cette question, on considère $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes.

On pose $\sigma_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

- (a) On suppose que la suite (σ_n) est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Justifier que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n$$

et en déduire que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

- (b) On suppose que la suite $\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, que la série $\sum |b_n - b_{n+1}| \sqrt{n}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} b_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

11. (a) Etablir que pour tout entier naturel impair p , on a

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = 2.$$

- (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé et N_0 le plus grand entier tel que $(2N_0 + 1)^2 \leq N$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{(2N_0+1)^2-1} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = 2N_0.$$

- (c) Etablir :

$$\left| \sum_{n=(2N_0+1)^2}^N (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right| \leq 8(N_0 + 1).$$

- (d) En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ est une série convergente.
12. Dans cette question, θ est un nombre réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$.
- (a) Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est bornée.
- (b) Montrer que la série $\sum |c_n - c_{n+1}|$ avec $c_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.
- (c) En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} e^{in\theta}$ est convergente.
13. Conclure.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on cherche à étudier des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par une formule de récurrence linéaire afin de trouver une formule simple donnant u_n en fonction de n .

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si μ est une valeur propre d'une matrice M de taille $n \times n$, on note E_μ le sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$ associé à la valeur propre μ , c'est-à-dire le noyau de l'application linéaire $M - \mu I_n$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\mu = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx = \mu x\} = \text{Ker}(M - \mu I_n).$$

2.1 Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite réelle récurrente d'ordre 2 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_1 &= 1, \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n. \end{cases} \quad (\star)$$

1. Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'on peut écrire la relation $(\star)$ sous la forme

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = M U_n,$$

où M est l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dira que M est la matrice de récurrence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Calculer les valeurs propres de la matrice M .
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de la matrice M .
5. Identifier une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$D = P^{-1}MP. \quad (1)$$

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$M^n P = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ a^{n+1} & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels à déterminer.

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule suivante :

$$u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5} 2^n}.$$

8. En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2.2 Suite récurrente d'ordre p

Dans cette partie, on considère une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une récurrence d'ordre p de la forme :

$$v_{n+p} = \mu_0 v_n + \mu_1 v_{n+1} + \cdots + \mu_{p-1} v_{n+p-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

où $(\mu_i)_{i=1 \dots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$. De plus, on se donne une condition initiale pour les p premiers éléments de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous la forme

$$v_0 = v^0, v_1 = v^1, \dots, v_p = v^p, \quad (3)$$

où $(v^0, \dots, v^p)$ est une autre famille de réels fixée.

Une telle suite possède également une matrice de récurrence $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = M V_n,$$

avec $V_n = (v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+p-1})^t$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$.

9. Montrer que la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

10. Déterminer le polynôme caractéristique (noté χ_M) de la matrice M .

11. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,p} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \cdots & t_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{p-1,p-1} & t_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{p,p} \end{pmatrix},$$

où les $t_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$, telles que

$$T = P^{-1}MP. \quad (4)$$

12. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$V_n = PT^n P^{-1}V_0.$$

2.3 Diagonalisation

On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \end{pmatrix}.$$

où on rappelle que $(\mu_i)_{i=1\dots p-1}$ est une famille de réels fixée avec $\mu_0 \neq 0$.

13. Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 qui soit colinéaire à un vecteur de la forme

$$(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \dots, \lambda_1^{p-1}).$$

14. Montrer que la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ suivante

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda_1 & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

est de rang supérieur ou égal à $p - 1$.

15. En déduire que les sous-espaces propres de la matrice M sont tous de dimension 1, c'est-à-dire

$$\text{Pour tout } i \in \{1, \dots, p\}, \quad \dim(E_{\lambda_i}) = 1.$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes. Et on note D la matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

16. Montrer qu'il existe une matrice de passage P de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_p \\ \nu_1^2 & \nu_2^2 & \cdots & \nu_p^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu_1^{p-1} & \nu_2^{p-1} & \cdots & \nu_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

avec $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p)$ une famille de réels à déterminer telle que $D = P^{-1}MP$.

17. **Application :** Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 0, \\ a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 0, \\ b_1 = 0, \\ b_2 = 1, \\ b_{n+3} = b_{n+2} - b_{n+1} + b_n \end{cases} \quad (5)$$

vérifient $a_n = \frac{i^n - (-i)^n}{2i}$ et $b_n = \frac{1 - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2}$ où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière du nombre $n/2$.