AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\dfrac{d^n}{dX^n}$ la dérivation n-ième par rapport à la variable X, $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées.

1 Problème d'analyse

Le but du problème d'analyse est d'étudier quelques propriétés des polynômes dit de Legendre.

1.1 Préliminaires

1. Calculer les dérivées des fonctions polynômes X^2-1, $(X^2-1)^2$ et $(X^2-1)^3$.
   On a les dérivées suivantes : $2X$, $4X(X^2-1)$ et $6X(X^2-1)^2$.

On définit les polynômes $P_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $P_0(X) = 1$.

2. Donner une expression simple des polynômes P_n pour $n \in \{1,2,3\}$.
   Avec les questions précédentes comme base, on a les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X, \quad P_2(X) = \frac{1}{8}\frac{d}{dX}(4X(X^2-1)) = \frac{1}{2}(3X^2-1), \\ P_3(X) &= \frac{1}{48}\frac{d^2}{dX^2}(6X(X^2-1)^2)) = \frac{1}{48}\frac{d}{dX}(6(X^2-1)^2 + 24X^2(X^2-1)) \\ &= \frac{1}{2}X(X^2-1) + X(X^2-1)) + X^3 = \frac{1}{2}(5X^3-3X). \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le degré de P_n et donner son coefficient dominant.
   P_n est la dérivée n-ième d'un polynôme de degré $2n$, donc il est de degré n. Son coefficient dominant est donné par

$$\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(2n-n+1) = \frac{(2n)!}{2^n n! n!}.$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi la famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_N[X]$.

   La famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une famille échelonnée en degrés de $\mathbb{R}_N[X]$ donc c'est nécessairement une base.

5. Montrer que
$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}(X(X^2-1)^n)$$

   Si on dérive une fois $\dfrac{(X^2-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$ on obtient
$$\frac{(n+1)2X(X^2-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{X(X^2-1)^n}{2^n n!}$$

   d'où le résultat demandé.

1.2 Autre expression

6. Soit f une fonction réelle. Déduire de l'égalité
$$f(X) = \frac{f(X)+f(-X)}{2} + \frac{f(X)-f(-X)}{2}$$
   que toute fonction réelle est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Trivial
7. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire) est une fonction impaire (resp. paire).
   Trivial
8. Conclure sur la parité des fonctions polynômes P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   P_n est la dérivée n-ième d'un polynôme pair. Il est donc pair si n est pair et impair si n est impair.

Soit k un entier entre 0 et n. On note $a_k^{(n)}$ le coefficient d'ordre k du polynôme P_n tel qu'on ait la formule suivante :
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} X^k.$$

9. En développant $(X^2-1)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que les coefficients $a_k^{(n)}$ sont donnés par la formule
$$\begin{cases} a_{n-2k}^{(n)} = \dfrac{(-1)^k}{2^n} C_n^k C_{2n-2k}^n = \dfrac{(-1)^k}{2^n} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \dfrac{(2n-2k)!}{n!(n-2k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq n/2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
   où C_n^k désigne le nombre de combinaison de k éléments pris parmi n.
   On écrit
$$(X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{2n-2k}(-1)^k.$$

Puis on dérive n fois, ce qui donne (modulo le facteur $2^n n!$) un coefficient $a_{n-2k}^{(n)}$ égal à

$$(-1)^k C_n^k (2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(2n-2k-n+1) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}$$

d'où le résultat demandé. Les autres coefficients étant évidemment nuls.

On obtient donc la forme équivalente

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_n^k C_{2n-2k}^n X^{n-2k},$$

où E est la fonction partie entière.

10. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme

$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X).$$

Avec le calcul des coefficients dominants de la question 3, on trouve un coefficient d'ordre $n+1$ égal à

$$\frac{(n+1)(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!} - (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n! n!} = \frac{(2n)!}{2^{n+1}n!(n+1)!}((2n+2)(2n+1) - 2(2n+1)(n+1)) = 0.$$

Ce n'est donc pas le coefficient dominant. Par la question 9, le coefficient d'ordre n est nul. il faut donc utiliser le coefficient d'ordre $n-1$. Celui du polynôme $(n+1)P_{n+1}(X)$ est donné par

$$(n+1)a_{n+1-2\times 1}^{(n+1)} = (n+1)\frac{(-1)^1}{2^{n+1}}\frac{(n+1)!}{n!1!}\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = -\frac{(n+1)}{2^{n+1}}\frac{(2n)!}{n!(n-1)!},$$

celui de $(2n+1)XP_n(X)$ est donné par

$$(2n+1)a_{n-2\times 1}^{(n)} = -\frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!}.$$

La différence est donc

$$-\frac{(n+1)}{2^{n+1}n!}\frac{(2n)!}{(n-1)!} + \frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!}\frac{-n(n+1)(2n-1)+n(2n+1)(n-1)}{(n-1)}$$

$$= -\frac{(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!}\frac{2n^2}{(n-1)} = -n\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!(n-1)!}.$$

11. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Bonnet défini par

$$B_{n+1}(X) := (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X).$$

Le calcul précédent fait apparaître l'opposé du coefficient dominant de nP_{n-1}. Donc B_{n+1} est au plus de degré $n-2$. Avec la parité des puissance de X, on peut améliorer cette estimation à $\leq n-3$. En fait, on peut même montrer que B_{n+1} est le polynôme identiquement nul. C'est la relation de Bonnet.

12. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme

$$\frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X).$$

Un calcul exactement identique à la question 10 montrer que le coefficient d'ordre n est nul. Le coefficient dominant est donc certainement celui d'ordre $n-1$, mais le polynôme dérivé de P_{n+1} ne possède que des puissances de X qui suivent la parité de n et idem pour P_n. Donc le coefficient d'ordre $n-1$ est aussi nul. Reste donc celui d'ordre $n-2$. Celui du polynôme dérivé de $P_{n+1}(X)$ est donné par

$$\frac{-1}{2^{n+1}n!}\frac{(2n)!}{(n-2)!},$$

celui de $(2n+1)P_n(X)$ est donné par

$$-\frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!}.$$

La différence est donc

$$-\frac{1}{2^{n+1}n!}\frac{(2n)!}{(n-2)!} + \frac{(2n+1)}{2^n(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!}(-n(2n-1)+n(2n+1))$$

$$= -\frac{2n(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!} = (n-1)\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!(n-1)!}.$$

13. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Rodrigues

$$R_n(X) := \frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X) - \frac{d}{dX}(P_{n-1}(X)).$$

Le calcul précédent fait apparaître le coefficient dominant du polynôme dérivé de P_{n-1}. Donc R_n est au plus de degré $n-3$. Avec la parité des puissance de X, on peut améliorer cette estimation à $\leq n-4$. En fait, on peut même montrer que R_n est le polynôme identiquement nul. C'est la relation de Rodrigues.

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

On remarque que $(X^2-1) = (X-1)(X+1)$ et on utilise la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dX^k}(X-1)^n \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}}(X+1)^n \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k. \end{aligned}$$

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = 1$. En déduire $P_n(-1)$.
Avec la forme précedente, c'est évident. Par parité/imparité, $P_n(-1) = (-1)^n$.

1.3 Orthogonalité

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

16. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
   Forme bilinéaire symétrique définie positive.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on dit que P est orthogonal à $\mathbb{R}_N[X]$ lorsque $\langle P, Q\rangle = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_N[X]$. On note $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n\rangle$ le carré de la norme de P_n qu'on supposera égal à $\dfrac{2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On supposera également que le polynôme de Bonnet B_{n+1} et le polynôme de Rodrigues R_n sont identiquement nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. Montrer l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{cases} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \end{cases} \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

   Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors par la question 11 et $B_{n+2} = 0$ on a

$$\begin{aligned} \langle P_{n+2}, Q\rangle &= \left\langle \frac{2n+3}{n+2} X P_{n+1}(X) - \frac{n+1}{n+2} P_n(X), Q \right\rangle \\ &= \frac{2n+3}{n+2}\langle P_{n+1}(X), XQ\rangle - \frac{n+1}{n+2}\langle P_n(X), Q\rangle = 0. \end{aligned}$$

18. Montrer que $\langle P_{n+2}, P_{n+1}\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   $P_{n+2}P_{n+1}$ est un polynôme constitué uniquement de termes impaires. Son intégrale sur $[-1, 1]$ est donc nulle par imparité.
19. En déduire l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{cases} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \\ \langle P_{n+2}, P_n\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n+1}[X].$$

   Avec 17 et 18 on obtient 19.
20. En déduire que P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(P_n)_{n\leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$.
   Par récurrence. P_1 est bien orthogonal aux constantes. P_2 est orthogonal à P_1 car P_2P_1 n'a que des termes impaires, donc son intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle. Et l'intégrale de P_2 sur $[-1, 1]$ vaut $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}(1 + 1) = 0$. Supposons maintenant par hypothèse de récurrence que P_{m+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_m[X]$ pour tout $m \leq n$. Par la question 13 et la question 15

$$\begin{aligned} (2n+1)\langle P_{n+2}, P_n\rangle &= \langle P_{n+2}, P'_{n+1} - P'_{n-1}\rangle = \langle P_{n+2}, P'_{n+1}\rangle \\ &= [P_{n+2}P_{n+1}]_{-1}^{1} - \langle P'_{n+2}, P_{n+1}\rangle \\ &= 1 - (-1)^{2n+3} - \langle (2n+3)P_{n+1} - P'_n, P_{n+1}\rangle \\ &= 2 - (2n+3)\langle P_{n+1}, P_{n+1}\rangle = 0. \end{aligned}$$

   Par 19 on peut conclure. Les $N + 1$ polynômes de $(P_n)_{n\leq N}$ forment donc une famille orthogonale, donc une base de $\mathbb{R}_N[X]$ espace de dimension finie $N + 1$.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on étudie un endomorphisme u sur $\mathbb{R}[X]$ qui laisse stable les sous-espaces $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire un endormorphisme tel que

$$\text{Pour tout } Q \in \mathbb{R}_N[X],\ u(Q) \in \mathbb{R}_N[X].$$

Les compositions successives de u notées u^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ ont alors la même propriété (avec la convention $u^0 = Id$ où Id est l'endomorphisme identité). Pour tout $P \in \mathbb{R}_N[X]$, on s'interroge sur le sens de la limite de $u^m(P)$ lorsque $m \to +\infty$. On note Ker et Im respectivement le noyaux et l'image d'un endomorphisme.

2.1 Sous-espaces stables

Soit $\gamma \in]0,1[$, on pose u_γ l'endomorphisme suivant

$$\begin{array}{rcl} u_\gamma : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \gamma P\left(\dfrac{(4\gamma-1)X}{2\gamma+1}\right) + (1-\gamma)P\left(\dfrac{(4\gamma-1)X+1}{2\gamma+1}\right). \end{array}$$

1. Vérifier que u_γ est un endomorphisme qui laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.
   Le degré n'est pas augmenté par u_γ.

Puisque u_γ laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut définir $u_{\gamma,N}$ comme la restriction du morphisme u_γ au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ par la formule

$$\begin{array}{rcl} u_{\gamma,N} : \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R}_N[X] \\ P & \mapsto & u_\gamma(P). \end{array}$$

2. Montrer que $u_{\gamma,N}$ est bien un endomorphisme.
   $u_{\gamma,N}(\lambda P + Q) = \lambda u_\gamma(P) + u_\gamma(Q)$.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N} \subset \mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}^{m+1} \subset \mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}^{m+2}$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}$ alors $u_{\gamma,N}^{m+1}(x) = u_{\gamma,N}^m(u_{\gamma,N}(x)) = u_{\gamma,N}^m(0) = 0$. D'où la première inclusion. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}^{m+1}$ alors $u_{\gamma,N}^{m+2}(x) = u_{\gamma,N}(u_{\gamma,N}^{m+1}(x)) = u_{\gamma,N}(0) = 0$. D'où la deuxième inclusion.
4. Que dire de la suite réelle $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $d_m = \dim(\mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}^m)$?
   La suite est évidemment croissante majorée par $N+1$ donc convergente.
5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^{m+2} \subset \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^{m+1} \subset \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^{m+2}$ alors il existe $x \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $u_{\gamma,N}^{m+2}(x) = y = u_{\gamma,N}^{m+1}(u_{\gamma,N}(x))$. Donc $y \in \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^{m+1}$. D'où la première inclusion. Soit $y \in \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^{m+1}$ alors il existe $x \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $u_{\gamma,N}^{m+1}(x) = y = u_{\gamma,N}(u_{\gamma,N}^m(x))$. Donc $y \in \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}$. D'où la deuxième inclusion.
6. Que dire de la suite réelle $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $i_m = \dim(\mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^m)$?
   La suite est évidemment décroissante minorée donc convergente.

2.2 Étude de $u_{\frac{1}{3},2}$

Dans cette sous-partie, on pose $N = 2$ et $\gamma = 1/3$. On va montrer que $u_{\frac{1}{3},2}^m(P)$ converge vers une constante lorsque $m \to +\infty$ et expliciter cette constante en fonction de P. Par souci d'allégement des notations, on notera v l'endomorphisme $u_{\frac{1}{3},2}$.

7. Donner la matrice de v dans la base canonique $\mathcal{B}_2 = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On notera cette matrice M.

$v(1) = \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1$, $v(X) = \frac{1}{3}\frac{4/3-1}{2/3+1}X + \frac{2}{3}\frac{(4/3-1)X+1}{2/3+1} = \frac{X+2}{5}$ et

$$v(X^2) = \frac{1}{3}\frac{X^2}{25} + \frac{2}{3}\frac{(X+3)^2}{25} = \frac{3X^2+12X+18}{75} = \frac{X^2+4X+6}{25}.$$

D'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 6/25 \\ 0 & 1/5 & 4/25 \\ 0 & 0 & 1/25 \end{pmatrix}.$$

8. En déduire Ker v et Im v.
On voit que la matrice est de rang 3 donc Im $v = \mathbb{R}_2[X]$ et Ker $v = \{0\}$.
9. Montrer que les suites $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont constantes.
M est triangulaire supérieure donc M^m aussi. Les coefficients diagonaux sont donnés explicitement par 1, 5^{-m} et 5^{-2m} donc noyaux et images sont inchangés. Les dimensions sont donc constantes.
10. Montrer que la famille $\mathcal{B}_2' = \{1, 1-2X, 1-6X+6X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
La famille est échelonnée en degrés et possède 3 éléments donc c'est bien une base.
11. Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2'$ à $\mathcal{B}_2$.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

12. Calculer l'inverse de la matrice Q.

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

13. En déduire la matrice D de v dans la base $\mathcal{B}_2'$.

$$D = Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/25 \end{pmatrix}.$$

14. Que représentent les vecteurs de $\mathcal{B}_2'$ vis-à-vis de l'endomorphisme v ?
Ce sont des vecteurs propres.
15. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit a_P, b_P et c_P les coefficients réels tels que

$$P(X) = a_P X^2 + b_P X + c_P.$$

Ce sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer les coordonnées a_P', b_P' et c_P' de P dans la base $\mathcal{B}_2'$.
Le résultat est donné par la matrice Q^{-1} mais on peut aussi montrer que

$$a_P X^2 + b_P X + c_P = \frac{a_P}{6}(1-6X+6X^2) + \frac{b_P+a_P}{-2}(1-2X) + \frac{2a_P+3b_P+6c_P}{6}.$$

16. Calculer M^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
M^m &= \begin{pmatrix} 1 & 1/5^m & 1/25^m \\ 0 & -2/5^m & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^m & 0 \\ 0 & 0 & 1/25^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
&= QD^mQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^m & 0 \\ 0 & 0 & 1/25^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1/5^m & 1/25^m \\ 0 & -2/5^m & -6/25^m \\ 0 & 0 & 6/25^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 - 5^{-m}/2 & -5^{-m}/2 + 25^{-m}/6 + 1/3 \\ 0 & 5^{-m} & 5^{-m} - 25^{-m} \\ 0 & 0 & 25^{-m} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

On pose e_z la forme linéaire d'évaluation du polynôme. C'est une forme linéaire qui a un polynôme P fait correspondre la valeur de la fonction polynôme associée au point $z \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
e_z : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R} \\
P &\mapsto P(z).
\end{aligned}
$$

17. Montrer que e_z n'est pas injective et qu'elle est surjective.
Pas injective car $e_z(z) = e_z(X)$ et surjective car $e_z(z) = z$.

18. Expliciter la restriction de e_z sur $\mathbb{R}_2[X]$ en fonction de z, a_P, b_P et c_P.

$$e_z(P) = a_P z^2 + b_P z + c_P = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_P \\ b_P \\ a_P \end{pmatrix}.$$

19. Montrer que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$.
On écrit

$$e_z(v^m(P)) = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 \end{pmatrix} M^m \begin{pmatrix} c_P \\ b_P \\ a_P \end{pmatrix}$$

et on passe à la limite. Ou encore par linéarité avec $e_z(v^m(1)) = e_z(1) = 1$, $e_z(v^m(1-2X)) = 5^{-m} e_z(1-2X) = 5^{-m}(1-2z)$ et $e_z(v^m(1-6X+6X^2)) = 25^{-m} e_z(1-6X+6X^2) = 25^{-m}(1-6z+6z^2)$ d'où

$$e_z(v^m(P)) = 25^{-m}(1-6z+6z^2)a'_P + 5^{-m}(1-2z)b'_P + c'_P \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} c'_P = \frac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$$

20. En déduire que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

Pour tout P, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \left[a_P \frac{X^3}{3} + b_P \frac{X^2}{2} + c_P X \right]_0^1 = \frac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$.