ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\dfrac{d^n}{dX^n}$ la dérivation n-ième par rapport à la variable X, $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées.

1 Problème d'analyse

Le but du problème d'analyse est d'étudier quelques propriétés des polynômes dit de Legendre.

1.1 Préliminaires

1. Calculer les dérivées des fonctions polynômes $X^2 - 1$, $(X^2-1)^2$ et $(X^2-1)^3$.

On définit les polynômes $P_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dX^n}((X^2-1)^n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $P_0(X) = 1$.

2. Donner une expression simple des polynômes P_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le degré de P_n et donner son coefficient dominant.
4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi la famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_N[X]$.
5. Montrer que

$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}(X(X^2-1)^n)$$

1.2 Autre expression

6. Soit f une fonction réelle. Déduire de l'égalité
$$f(X) = \frac{f(X) + f(-X)}{2} + \frac{f(X) - f(-X)}{2}$$
que toute fonction réelle est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
7. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire) est une fonction impaire (resp. paire).
8. Conclure sur la parité des fonctions polynômes P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit k un entier entre 0 et n. On note $a_k^{(n)}$ le coefficient d'ordre k du polynôme P_n tel qu'on ait la formule suivante :
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} X^k.$$

9. En développant $(X^2 - 1)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que les coefficients $a_k^{(n)}$ sont donnés par la formule
$$\begin{cases} a_{n-2k}^{(n)} = \dfrac{(-1)^k}{2^n} C_n^k C_{2n-2k}^n = \dfrac{(-1)^k}{2^n} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \dfrac{(2n-2k)!}{n!(n-2k)!}, & \text{si } 0 \leq k \leq n/2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
où C_n^k désigne le nombre de combinaison de k éléments pris parmi n.

On obtient donc la forme équivalente
$$P_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_n^k C_{2n-2k}^n X^{n-2k},$$

où E est la fonction partie entière.

10. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme
$$(n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X).$$
11. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Bonnet défini par
$$B_{n+1}(X) := (n+1)P_{n+1}(X) - (2n+1)XP_n(X) + nP_{n-1}(X).$$
12. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le coefficient dominant du polynôme
$$\frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X).$$
13. En déduire, pour tout $n \geq 1$, une majoration du degré du polynôme de Rodrigues
$$R_n(X) := \frac{d}{dX}(P_{n+1}(X)) - (2n+1)P_n(X) - \frac{d}{dX}(P_{n-1}(X)).$$
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = 1$. En déduire $P_n(-1)$.

1.3 Orthogonalité

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

16. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on dit que P est orthogonal à $\mathbb{R}_N[X]$ lorsque $\langle P, Q \rangle = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_N[X]$. On note $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle$ le carré de la norme de P_n qu'on supposera égal à $\dfrac{2}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On supposera également que le polynôme de Bonnet B_{n+1} et le polynôme de Rodrigues R_n sont identiquement nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. Montrer l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \end{array} \right. \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

18. Montrer que $\langle P_{n+2}, P_{n+1} \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
19. En déduire l'implication suivante pour tout $n \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X] \\ \langle P_{n+2}, P_n \rangle = 0 \end{array} \right. \Rightarrow P_{n+2} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n+1}[X].$$

20. En déduire que P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(P_n)_{n \leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$.

2 Problème d'algèbre

Dans ce problème, on étudie un endomorphisme u sur $\mathbb{R}[X]$ qui laisse stable les sous-espaces $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire un endormorphisme tel que

$$\text{Pour tout } Q \in \mathbb{R}_N[X], \ u(Q) \in \mathbb{R}_N[X].$$

Les compositions successives de u notées u^m pour tout $m \in \mathbb{N}$ ont alors la même propriété (avec la convention $u^0 = Id$ où Id est l'endomorphisme identité). Pour tout $P \in \mathbb{R}_N[X]$, on s'interroge sur le sens de la limite de $u^m(P)$ lorsque $m \to +\infty$. On note Ker et Im respectivement le noyaux et l'image d'un endomorphisme.

2.1 Sous-espaces stables

Soit $\gamma \in]0, 1[$, on pose u_γ l'endomorphisme suivant

$$\begin{array}{rcl} u_\gamma : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \gamma P\left(\dfrac{(4\gamma - 1)X}{2\gamma + 1}\right) + (1 - \gamma)P\left(\dfrac{(4\gamma - 1)X + 1}{2\gamma + 1}\right). \end{array}$$

1. Vérifier que u_γ est un endomorphisme qui laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Puisque u_γ laisse stable $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut définir $u_{\gamma,N}$ comme la restriction du morphisme u_γ au sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ par la formule

$$\begin{array}{rcl} u_{\gamma,N} : \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R}_N[X] \\ P & \mapsto & u_\gamma(P). \end{array}$$

2. Montrer que $u_{\gamma,N}$ est bien un endomorphisme.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N} \subset \mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}^{m+1} \subset \mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}^{m+2}$.
4. Que dire de la suite réelle $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $d_m = \dim(\mathrm{Ker}\ u_{\gamma,N}^m)$?
5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^{m+2} \subset \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^{m+1} \subset \mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}$.
6. Que dire de la suite réelle $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $i_m = \dim(\mathrm{Im}\ u_{\gamma,N}^m)$?

2.2 Étude de $u_{\frac{1}{3},2}$

Dans cette sous-partie, on pose $N = 2$ et $\gamma = 1/3$. On va montrer que $u_{\frac{1}{3},2}^m(P)$ converge vers une constante lorsque $m \to +\infty$ et expliciter cette constante en fonction de P. Par souci d'allégement des notations, on notera v l'endomorphisme $u_{\frac{1}{3},2}$.

7. Donner la matrice de v dans la base canonique $\mathcal{B}_2 = \{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On notera cette matrice M.
8. En déduire $\mathrm{Ker}\ v$ et $\mathrm{Im}\ v$.
9. Montrer que les suites $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont constantes.
10. Montrer que la famille $\mathcal{B}_2' = \{1, 1-2X, 1-6X+6X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
11. Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2'$ à $\mathcal{B}_2$.
12. Calculer l'inverse de la matrice Q.
13. En déduire la matrice D de v dans la base $\mathcal{B}_2'$.
14. Que représentent les vecteurs de $\mathcal{B}_2'$ vis-à-vis de l'endomorphisme v ?
15. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit a_P, b_P et c_P les coefficients réels tels que

$$P(X) = a_P X^2 + b_P X + c_P.$$

    Ce sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer les coordonnées a_P', b_P' et c_P' de P dans la base $\mathcal{B}_2'$.
16. Calculer M^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On pose e_z la forme linéaire d'évaluation du polynôme. C'est une forme linéaire qui a un polynôme P fait correspondre la valeur de la fonction polynôme associée au point $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} e_z : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(z). \end{array}$$

17. Montrer que e_z n'est pas injective et qu'elle est surjective.
18. Expliciter la restriction de e_z sur $\mathbb{R}_2[X]$ en fonction de z, a_P, b_P et c_P.
19. Montrer que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2a_P + 3b_P + 6c_P}{6}$.
20. En déduire que pour tout $z \in [0,1]$, $e_z(v^m(P)) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.