



AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_m[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à m . On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), on note $\mathcal{C}([a, b])$ l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a, b]$.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier des méthodes classiques d'intégration numérique afin de proposer des approximations de la valeur de certaines intégrales.

On définit I l'opérateur d'intégration sur $\mathcal{C}([a, b])$ de la manière suivante :

$$I : \begin{array}{ll} \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_a^b f(x) dx. \end{array}$$

1.1 Préliminaires

1. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on a $I(f) \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$ positive, on a $I(f) \geq (b - a) \inf_{x \in [a, b]} f(x)$.

3. Montrer que I est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \lambda I(f) + I(g) = I(\lambda f + g).$$

4. Dans le cas où $0 < a < b < 1$, calculer $I(\sqrt{1-x^2})$.

5. En déduire la valeur de $4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

1.2 Formules de quadrature

On se fixe un entier $n \geq 1$. Soit $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ une suite de n points de l'intervalle $[a, b]$ tels que $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. Soit également $(w_i)_{i=1, \dots, n}$ une famille de n réels positifs. On note $Q(f)$ le réel tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

On parle alors d'une formule de quadrature "à n points".

6. Montrer que Q est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \lambda Q(f) + Q(g) = Q(\lambda f + g).$$

7. Montrer que $|Q(f)| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^n w_i$.

8. Montrer que $|Q(f)| \leq n \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \left(\sup_{i=1, \dots, n} w_i \right)$.

9. Montrer que pour toute fonction positive croissante

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=1, \dots, n-1} \frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) I(f).$$

10. Montrer que pour toute fonction positive décroissante

$$\sum_{i=2}^n w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=2, \dots, n} \frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) I(f).$$

1.3 Polynômes d'interpolation

Lorsque $Q(p) = I(p)$ pour tous les polynômes $p \in \mathbb{R}_m[X]$ alors on dit que l'opérateur Q "intègre exactement les polynômes d'ordre m ".

11. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_1) "à 1 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 (les constantes).

On note $p_n[f]$ le polynôme d'interpolation de la fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p_n[f] : x &\mapsto \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x), \end{aligned}$$

où L_i est le i -ème polynôme de Lagrange associé à la famille $(x_i)_{i=1,\dots,n}$, c'est-à-dire

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i, j=1}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i, j=1}^n (x_i - x_j)}$$

12. Montrer que $p_n[f](x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

13. Lorsque $w_i = I(L_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $I(p_n[f]) = Q(f)$.

On pose F la fonction

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t)(b-a) - \int_a^b f(x) dx$$

14. Montrer que F s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

15. En déduire que tout opérateur Q "à 1 point" qui intègre exactement les constantes vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq (b-a)^2 \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ dès que f est dérivable.

16. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_2) "à 2 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1 (les fonctions affines).

17. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_3) "à 3 points" avec $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ et $x_3 = b$ qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0, 1 et 2.

1.4 Estimation d'erreur

Dans cette partie on suppose que $x_1 = a < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$ et on définit :

Q_n^{gauche} l'opérateur "à n points à gauche" tel que $Q_n^{gauche}(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$, et

Q_n^{droite} l'opérateur "à n points à droite" tel que $Q_n^{droite}(f) = \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$.

18. Donner les familles $(w_i^{gauche})_{i=1,\dots,n}$ et $(w_i^{droite})_{i=1,\dots,n}$ associées à ces deux opérateurs.

19. Montrer que les deux opérateurs Q_n^{gauche} et Q_n^{droite} "à n points" vérifient

$$\max \left\{ \left| Q_n^{gauche}(f) - I(f) \right|, \left| Q_n^{droite}(f) - I(f) \right| \right\} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

20. Trouver un entier $n \geq 2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'opérateur $Q = \alpha Q_n^{gauche} + \beta Q_n^{droite}$

a) soit un opérateur "à n points" (préciser les familles $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ associées),

b) intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1

c) vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

2 Problème d'algèbre

Le but du problème d'algèbre est d'étudier différentes méthodes d'approximation d'un nuage de point, il traite d'interpolation polynômiale, de moindres carrés et de régression linéaire.

Pour cela, on se fixe un entier $n \geq 1$ et deux familles $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ qui représentent les coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ d'un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que les x_i sont tous différents, ce sont les abscisses des points du nuage. On ne suppose rien sur les y_i , ce sont les ordonnées des points du nuage.

2.1 Approximation polynômiale

On dit qu'un polynôme $p \in \mathbb{R}_m[X]$ approche k points du nuage lorsque $p(x_i) = y_i$ pour une famille d'au moins k indices i dans $\{1, \dots, n\}$.

1. On cherche un polynôme qui approche 2 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui approche x_1 et x_2 .
2. On cherche un polynôme qui approche 3 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui approche le nuage $(0, y_1; 1, y_2; 2, y_3)$.
3. On cherche un polynôme qui approche n points du nuage sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}.$$

Montrer que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire à n équations et n inconnues.

4. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \dots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

5. Calculer le déterminant de cette matrice M .
6. En déduire que le système admet une unique solution.
7. Soit un entier $j \in \{1, \dots, n\}$. Donner la formule exacte du polynôme L_j qui approche un nuage de points d'abscisses $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et d'ordonnées $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ telles que $y_j = 1$ et $y_i = 0$ si $i \neq j$.
8. En déduire une formule équivalente pour le polynôme P de la question 3. qui fait intervenir les L_j pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

2.2 Projection orthogonale

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathcal{C}([a, b])$ telle que

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ pour toutes fonctions } f, g \in \mathcal{C}([a, b]).$$

On pose f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que

$$\langle f - Q, f - Q \rangle = \inf_{P \in \mathbb{P}_{m-1}} \langle f - P, f - P \rangle$$

On parlera de la solution du problème de projection orthogonale.

9. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$.
10. En déduire que $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b])$ notée $\|f\|$.
11. Supposons que Q soit une solution du problème de projection orthogonale. On pose $\tilde{Q}$ un autre polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$. Montrer que

$$\|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 \geq 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

12. En déduire que $\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle = 0$.
13. Conclure sur l'unicité du polynôme solution du problème de projection orthogonale.
14. Montrer que $\langle f, X^j \rangle = \langle Q, X^j \rangle$ pour tous les monômes X^j pour $j \leq m-1$.
15. Lorsque $n = m$, et en notant $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$, montrer que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.
16. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1/j & \dots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/i & \dots & 1/(i+j-1) & \dots & 1/(i+n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/(n+j-1) & \dots & 1/(n+n-1) \end{pmatrix},$$

ou plus simplement $M_{i,j} = 1/(i+j-1)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

2.3 Moindres carrés

Lorsqu'on ne cherche plus à approcher ni exactement ni orthogonalement le nuage, on peut chercher à minimiser l'erreur quadratique entre le polynôme et les points. On parle d'approximation aux moindres carrés. Elle est définie ainsi : trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\sum_{i=1}^n (R(x_i) - y_i)^2 = \inf_{P \in \mathbb{P}_m} \sum_{i=1}^n (P(x_i) - y_i)^2.$$

On note encore $R = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$, on pose M la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{j-1} & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \dots & x_i^{j-1} & \dots & x_i^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{j-1} & \dots & x_n^{m-1} \end{pmatrix},$$

ou simplement $M_{i,j} = x_i^{j-1}$. Enfin on pose A le vecteur colonne $(a_0, \dots, a_{m-1})$ et Y le vecteur colonne $(y_1, \dots, y_n)$.

17. Montrer que trouver le polynôme de minimisation du problème des moindres carrés est équivalent à résoudre le système

$$\|MA - Y\|_2 = \inf_{Z \in \mathbb{R}^n} \|MZ - Y\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur l'espace $\mathbb{R}^n$.

18. On note M^T la transposée de M . Montrer que la matrice $M^T M$ est diagonalisable.

On note V la matrice de passage de $\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ telle que $V^T M^T M V = D$ où D est une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_m^2 \end{pmatrix}.$$

On note c_j le j -ème vecteur colonne de la matrice MV et v_j le j -ème vecteur colonne de la matrice V . Et J l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $d_j \neq 0$.

19. Montrer que $M = \sum_{j \in J} c_j v_j^T$.

20. Montrer que les vecteurs $u_j = c_j / d_j$ pour les d_j non nuls forment une base orthonormée de l'image de M .

21. Expliquer pourquoi on peut compléter la famille des $(u_j)_{j \in J}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

On note U la matrice composée par l'ensemble de ces vecteurs.

22. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \in J$ forment une base de l'image de M^T .

23. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \notin J$ forment une base du noyau de M .

On pose E la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/d_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1/d_m & 0 & \dots & 0 \end{array} \right).$$

24. On suppose que le rang de M est m . Montrer que la solution des moindres carrés est donnée par $A = V E U^T Y$.

25. Quelle est la forme d'une solution lorsque le rang de M n'est plus supposé égal à m ?

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

Notations : on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_m[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à m . On identifie les polynômes avec les fonctions polynômes associées. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), on note $\mathcal{C}([a, b])$ l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle $[a, b]$.

1 Problème d'analyse

Le but du problème est d'étudier des méthodes classiques d'intégration numérique afin de proposer des approximations de la valeur de certaines intégrales.

On définit I l'opérateur d'intégration sur $\mathcal{C}([a, b])$ de la manière suivante :

$$I : \begin{array}{ll} \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_a^b f(x) dx. \end{array}$$

1.1 Préliminaires

1. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on a $I(f) \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.
$$I(f) \leq |I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|) = (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$
2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$ positive, on a $I(f) \geq (b - a) \inf_{x \in [a, b]} f(x)$.
$$I(f) = I(|f|) \geq I(\inf_{x \in [a, b]} |f(x)|) = (b - a) \inf_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$
3. Montrer que I est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \lambda I(f) + I(g) = I(\lambda f + g).$$

$$\text{Par linéarité de l'intégrale on a bien } \lambda I(f) + I(g) = \lambda \int f + \int g = \int \lambda f + g = I(\lambda f + g).$$

4. Dans le cas où $0 < a < b < 1$, calculer $I(\sqrt{1-x^2})$.

Un changement de variable $x = \cos \theta$ donne $I(\sqrt{1-x^2}) = - \int_{\arccos(a)}^{\arccos(b)} |\sin(\theta)| \sin(\theta) d\theta$. Le sinus étant positif sur l'intervalle d'intégration, on a $I(\sqrt{1-x^2}) = \int_{\arccos(b)}^{\arccos(a)} \sin^2(\theta) d\theta = \int_{\arccos(b)}^{\arccos(a)} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} \right]_{\arccos(b)}^{\arccos(a)}$. Inutile de développer beaucoup plus. On peut aussi utiliser $\sin(2 \arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

5. En déduire la valeur de $4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

On a $\arccos(a) = \pi/2$ et $\arccos(b) = 0$ d'où $4 \left[\frac{2\theta - \sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi - \sin(\pi) - 0 + \sin(0) = \pi$.

1.2 Formules de quadrature

On se fixe un entier $n \geq 1$. Soit $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite de n points de l'intervalle $[a, b]$ tels que $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. Soit également $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille de n réels positifs. On note $Q(f)$ le réel tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$

$$Q(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

On parle alors d'une formule de quadrature "à n points".

6. Montrer que Q est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que

$$\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } f, g \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \lambda Q(f) + Q(g) = Q(\lambda f + g).$$

$$\lambda Q(f) + Q(g) = \lambda \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i (\lambda f(x_i) + g(x_i)) = Q(\lambda f + g).$$

7. Montrer que $|Q(f)| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^n w_i$.

$$|Q(f)| \leq \sum_{i=1}^n |w_i f(x_i)| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^n w_i \text{ car les } w_i \text{ sont positifs.}$$

8. Montrer que $|Q(f)| \leq n \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \left(\sup_{i=1,\dots,n} w_i \right)$.

$$|Q(f)| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \sum_{i=1}^n w_i \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \right) \left(\sup_{i=1,\dots,n} w_i \right) \sum_{i=1}^n 1.$$

9. Montrer que pour toute fonction positive croissante

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=1,\dots,n-1} \frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) I(f).$$

Tout est positif donc on se passe des valeurs absolues

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

$$\text{on majore par le sup} \leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$$

$$\text{on intègre une constante} \leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i) dx$$

$$f \text{ est croissante} \leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

$$\text{on rassemble} \leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \int_{x_1}^{x_n} f(x) dx$$

$$f \text{ est positive} \leq \sup_{i=1, \dots, n-1} \left(\frac{w_i}{x_{i+1} - x_i} \right) I(f)$$

10. Montrer que pour toute fonction positive décroissante

$$\sum_{i=2}^n w_i f(x_i) \leq \left(\sup_{i=2, \dots, n} \frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) I(f).$$

Tout est positif donc on se passe des valeurs absolues

$$\sum_{i=2}^n w_i f(x_i) \leq \sum_{i=2}^n \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

$$\text{on majore par le sup} \leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

$$\text{on intègre une constante} \leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \sum_{i=2}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) dx$$

$$f \text{ est décroissante} \leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \sum_{i=2}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

$$\text{on rassemble} \leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x) dx$$

$$f \text{ est positive} \leq \sup_{i=2, \dots, n} \left(\frac{w_i}{x_i - x_{i-1}} \right) I(f)$$

1.3 Polynômes d'interpolation

Lorsque $Q(p) = I(p)$ pour tous les polynômes $p \in \mathbb{R}_m[X]$ alors on dit que l'opérateur Q "intègre exactement les polynômes d'ordre m ".

11. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_1) "à 1 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 (les constantes).

$Q_1(f) = (b-a)f(a)$ par exemple, ou encore $Q_1(f) = (b-a)f(b)$.

On note $p_n[f]$ le polynôme d'interpolation de la fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p_n[f] : x &\mapsto \sum_{i=1}^n f(x_i) L_i(x), \end{aligned}$$

où L_i est le i -ème polynôme de Lagrange associé à la famille $(x_i)_{i=1, \dots, n}$, c'est-à-dire

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i, j=1}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i, j=1}^n (x_i - x_j)}$$

12. Montrer que $p_n[f](x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$ donc $p_n[f](x_i) = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j(x_i) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \delta_{i,j} = f(x_i)$.

13. Lorsque $w_i = I(L_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $I(p_n[f]) = Q(f)$.

Par linéarité $I(p_n[f]) = \sum_{i=1}^n f(x_i) I(L_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i = Q(f)$.

On pose F la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t)(b-a) - \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

14. Montrer que F s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

f est continue donc elle admet un minimum au point x_m et un maximum au point x_M d'où $F(x_m) = f(x_m)(b-a) - \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b (f(x_m) - f(x)) dx \leq 0$. De même $F(x_M) = f(x_M)(b-a) - \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b (f(x_M) - f(x)) dx \geq 0$. Donc F change de signe sur $[a, b]$ donc elle s'y annule.

15. En déduire que tout opérateur Q "à 1 point" qui intègre exactement les constantes vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq (b-a)^2 \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ dès que f est dérivable.

On pose ξ_0 un point où F s'annule. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $|Q(f) - I(f)| = |(b-a)f(\xi) - I(f)| = |(b-a)f(\xi) - (b-a)f(\xi_0)| \leq (b-a)|\xi - \xi_0| \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq (b-a)^2 \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

16. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_2) "à 2 points" qui intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1 (les fonctions affines).

On pose $Q_2(f) = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ alors $Q_2(1) = \frac{b-a}{2}(1+1) = I(1)$ et $Q_2(x) = \frac{b-a}{2}(a+b) = \frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x dx = I(x)$.

17. Proposer un opérateur de quadrature (noté Q_3) “à 3 points” avec $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ et $x_3 = b$ qui intègre exactement les polynômes d’ordre 0, 1 et 2.

On pose $Q_3(f) = \frac{b-a}{6}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3))$ alors $Q_3(1) = \frac{b-a}{6}(1 + 4 + 1) = I(1)$,
 $Q_3(x) = \frac{b-a}{6}(a + 2a + 2b + b) = \frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x dx = I(x)$ et $Q_3(x^2) = \frac{b-a}{6}(a^2 + (a+b)^2 + b^2) = \frac{b-a}{3}(a^2 + b^2 + ab) = \frac{b^3-a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx = I(x)$.

1.4 Estimation d’erreur

Dans cette partie on suppose que $x_1 = a < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$ et on définit :

Q_n^{gauche} l’opérateur “à n points à gauche” tel que $Q_n^{gauche}(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$, et

Q_n^{droite} l’opérateur “à n points à droite” tel que $Q_n^{droite}(f) = \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$.

18. Donner les familles $(w_i^{gauche})_{i=1,\dots,n}$ et $(w_i^{droite})_{i=1,\dots,n}$ associées à ces deux opérateurs.

$w_i^{gauche} = (x_{i+1} - x_i)$ pour $i < n$ et $w_n^{gauche} = 0$. $w_i^{droite} = (x_i - x_{i-1})$ pour $i > 1$ et $w_1^{droite} = 0$

19. Montrer que les deux opérateurs Q_n^{gauche} et Q_n^{droite} “à n points” vérifient

$$\max \left\{ \left| Q_n^{gauche}(f) - I(f) \right|, \left| Q_n^{droite}(f) - I(f) \right| \right\} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

On ne le fait que pour un.

$$\begin{aligned}
 \left| Q_n^{gauche}(f) - I(f) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_i) - f(x)) dx \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i) - f(x)| dx \\
 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| (x - x_i) dx \\
 &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) dx \\
 &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \\
 &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2}
 \end{aligned}$$

20. Trouver un entier $n \geq 2$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'opérateur $Q = \alpha Q_n^{gauche} + \beta Q_n^{droite}$
- a) soit un opérateur "à n points" (préciser les familles $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ et $(w_i)_{i=1, \dots, n}$ associées),
 - b) intègre exactement les polynômes d'ordre 0 et 1
 - c) vérifie $|Q(f) - I(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Il suffit de prendre $\alpha = \beta = 1/2$. En effet Q reste un opérateur "à n points", tel que $|Q(f) - I(f)| = \frac{1}{2} |Q_n^{gauche} + Q_n^{droite} - 2I(f)| \leq \frac{1}{2} (|Q_n^{gauche} - I(f)| + |Q_n^{droite} - I(f)|)$ vérifie

donc bien l'inégalité voulue. De plus $2Q(1) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_1 +$

$x_n - x_1 = 2(b-a)$. Et $2Q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)x_i + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 +$

$\sum_{i=2}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} = \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} - a^2 + b^2 - \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} = b^2 - a^2$.

2 Problème d'algèbre

Le but du problème d'algèbre est d'étudier différentes méthodes d'approximation d'un nuage de point, il traite d'interpolation polynômiale, de moindres carrés et de régression linéaire.

Pour cela, on se fixe un entier $n \geq 1$ et deux familles $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ qui représentent les coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ d'un nuage de points dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que les x_i sont tous différents, ce sont les abscisses des points du nuage. On ne suppose rien sur les y_i , ce sont les ordonnées des points du nuage.

2.1 Approximation polynômiale

On dit qu'un polynôme $p \in \mathbb{R}_m[X]$ approche k points du nuage lorsque $p(x_i) = y_i$ pour une famille d'au moins k indices i dans $\{1, \dots, n\}$.

1. On cherche un polynôme qui approche 2 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_1[X]$ qui approche le nuage $(x_1, y_1; x_2, y_2)$.

C'est la droite affine $x \mapsto \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(y_1 - y_2) + y_2$.

2. On cherche un polynôme qui approche 3 points du nuage. Donner la forme du polynôme dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui approche le nuage $(0, y_1; 1, y_2; 2, y_3)$.

Il faut résoudre $c = y_1$, $a + b + c = y_2$ et $4a + 2b + c = y_3$. D'où $a = y_3/2 - y_2 + y_1/2$ et $b = 2y_2 - y_3/2 - 3y_1/2$ et $x \mapsto y_1 + (2y_2 - y_3/2 - 3y_1/2)x + (y_3/2 - y_2 + y_1/2)x^2$ est le polynôme recherché.

3. On cherche un polynôme qui approche n points du nuage sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}.$$

Montrer que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire à n équations et n inconnues.

Les équations s'écrivent $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_j^i - y_j = 0$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

4. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \dots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est simplement la réécriture sous forme matricielle.

5. Calculer le déterminant de cette matrice M .

C'est un Vandermonde $\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$.

6. En déduire que le système admet une unique solution.

Les x_i étant tous distincts, le déterminant est non nul donc la matrice est inversible, d'où l'unicité de la solution.

7. Soit un entier $j \in \{1, \dots, n\}$. Donner la formule exacte du polynôme L_j qui approche un nuage de points d'abscisses $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ et d'ordonnées $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ telles que $y_j = 1$ et $y_i = 0$ si $i \neq j$.

C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange, il s'écrit $\prod_{i \neq j} (x - x_i) / \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$.

8. En déduire une formule équivalente pour le polynôme P de la question 3. qui fait intervenir les L_j pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

Il est clair que $P(x) = \sum_{j=1}^n y_j L_j(x)$.

2.2 Projection orthogonale

On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathcal{C}([a, b])$ telle que

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ pour toutes fonctions } f, g \in \mathcal{C}([a, b]).$$

On pose f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que

$$\langle f - Q, f - Q \rangle = \inf_{P \in \mathbb{P}_{m-1}} \langle f - P, f - P \rangle$$

On parlera de la solution du problème de projection orthogonale.

9. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$.

Linéaire, positif et défini.

10. En déduire que $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b])$ notée $\|f\|$.

Cours.

11. Supposons que Q soit une solution du problème de projection orthogonale. On pose $\tilde{Q}$ un autre polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$. Montrer que

$$\|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 \geq 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$Q - t\tilde{Q}$ est un polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ donc $\|f - Q - t\tilde{Q}\|$ est plus grand que $\|f - Q\|$ qui réalise le minimum sur $\mathbb{R}_{m-1}[X]$.

12. En déduire que $\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle = 0$.

$0 \leq \|f - Q - t\tilde{Q}\|^2 - \|f - Q\|^2 = -2t\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle + t^2\|\tilde{Q}\|^2$. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, cela impose que $\langle f - Q, \tilde{Q} \rangle = 0$.

13. Conclure sur l'unicité du polynôme solution du problème de projection orthogonale.

Si $\hat{Q}$ est une autre solution alors en appliquant le résultat précédent à $\tilde{Q} = \hat{Q} - Q$, on a $\|f - \hat{Q}\|^2 = \|f - Q - (\hat{Q} - Q)\|^2 = \|f - Q\|^2 + \|\hat{Q} - Q\|^2 = \|f - Q\|^2$ car ils réalisent tous les deux le minimum. Donc $\|\hat{Q} - Q\| = 0$.

14. Montrer que $\langle f, X^j \rangle = \langle Q, X^j \rangle$ pour tous les monômes X^j pour $j \leq m - 1$.

On a $\langle f - Q, X^j \rangle = 0$ en appliquant à $\tilde{Q} = X^j$.

15. Lorsque $n = m$, et en notant $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$, montrer que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues.

$$\text{On a } \int_a^b f(x)x^j dx = \langle f, X^j \rangle = \langle Q, X^j \rangle = \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i X^j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}.$$

16. On pose M la matrice de ce système linéaire. Montrer que M peut s'écrire sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1/j & \dots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/i & \dots & 1/(i+j-1) & \dots & 1/(i+n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/n & \dots & 1/(n+j-1) & \dots & 1/(n+n-1) \end{pmatrix},$$

ou plus simplement $M_{i,j} = 1/(i+j-1)$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Il faut juste faire attention aux indices.

2.3 Moindres carrés

Lorsqu'on ne cherche plus à approcher ni exactement ni orthogonalement le nuage, on peut chercher à minimiser l'erreur quadratique entre le polynôme et les points. On parle d'approximation aux moindres carrés. Elle est définie ainsi : trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que

$$\sum_{i=1}^n (R(x_i) - y_i)^2 = \inf_{P \in \mathbb{P}_m} \sum_{i=1}^n (P(x_i) - y_i)^2.$$

On note encore $R = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$, on pose M la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{j-1} & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & \dots & x_i^{j-1} & \dots & x_i^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{j-1} & \dots & x_n^{m-1} \end{pmatrix},$$

ou simplement $M_{i,j} = x_i^{j-1}$. Enfin on pose A le vecteur colonne $(a_0, \dots, a_{m-1})$ et Y le vecteur colonne $(y_1, \dots, y_n)$.

17. Montrer que trouver le polynôme de minimisation du problème des moindres carrés est équivalent à résoudre le système

$$\|MA - Y\|_2 = \inf_{Z \in \mathbb{R}^n} \|MZ - Y\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur l'espace $\mathbb{R}^n$.

$$\|MA - Y\|_2^2 = \sum_{j=1}^n (MA - Y)_j^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{1}{i+j} - y_j \right)^2 = \sum_{j=1}^n (R(x_j) - y_j)^2.$$

18. On note M^T la transposée de M . Montrer que la matrice $M^T M$ est diagonalisable.

Elle est carrée, symétrique réelle.

On note V la matrice de passage de $\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ telle que $V^T M^T M V = D$ où D est une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_m^2 \end{pmatrix}.$$

On note c_j le j -ème vecteur colonne de la matrice MV et v_j le j -ème vecteur colonne de la matrice V . Et J l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, m\}$ tels que $d_j \neq 0$.

19. Montrer que $M = \sum_{j \in J} c_j v_j^T$.

$$M = MVV^T = \sum_{j=1}^m c_j v_j^T \text{ et pour les } j \notin J \text{ on a } c_j = 0.$$

20. Montrer que les vecteurs $u_j = c_j/d_j$ pour les d_j non nuls forment une base orthonormée de l'image de M .

Soit $y \in \text{Im}(M)$ alors il existe $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $y = Mx$ d'où $y = \sum_{j \in J} c_j v_j^T x = \sum_{j \in J} d_j \langle v_j, x \rangle c_j / d_j = \sum_{j \in J} d_j \langle v_j, x \rangle u_j$ d'où le caractère générateur. De plus $u_i^T u_j = \delta_{i,j} d_i^2 / d_j d_i = \delta_{i,j}$ d'où l'orthonormalisation et donc le caractère libre.

21. Expliquer pourquoi on peut compléter la famille des $(u_j)_{j \in J}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Gram-Schmidt.

On note U la matrice composée par l'ensemble de ces vecteurs.

22. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \in J$ forment une base de l'image de M^T .

$M^T = \sum_{j \in J} v_j c_j^T$ d'où le caractère générateur. Le caractère libre vient du caractère orthogonal des colonnes de la matrice V .

23. Montrer que les vecteurs colonnes v_j de V pour $j \notin J$ forment une base du noyau de M .

Ils forment une base de $\text{Im}(M^T)^\perp = \text{Ker}(M)$.

On pose E la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/d_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1/d_m & 0 & \dots & 0 \end{array} \right).$$

24. On suppose que le rang de M est m . Montrer que la solution des moindres carrés est donnée par $A = VEUT^T Y$.

$VEUT^T = \sum_{j \in J} v_j \frac{1}{d_j} u_j^T$ d'où $MVEUT^T = \sum_{k \in J} \sum_{j \in J} c_k v_k^T v_j \frac{1}{d_j} u_j^T = \sum_{j \in J} c_j / d_j u_j^T = \sum_{j \in J} u_j u_j^T$ est la matrice de projection orthogonale sur $\text{Im}(M) = \mathbb{R}^m$. Donc la solution consiste à projeter Y sur $\mathbb{R}^m$ puis résoudre, c'est-à-dire minimiser $MVEUT^T Y = MA$. La solution évidente est $A = VEUT^T Y$.

25. Quelle est la forme d'une solution lorsque le rang de M n'est plus supposé égal à m ?

Toute solution s'écrit comme $VEUT^T Y + (Id - VEUT^T M)w$ pour tout $w \in \mathbb{R}^n$. En effet, on projète Y sur $\text{Im}(M)$ ce qui donne à résoudre $MA = MVEUT^T Y$ d'où $M(A - VEUT^T Y) = 0$ donc trouver $A - VEUT^T Y \in \text{Ker}(M)$. Par la question 23, la matrice de projection sur $\text{Ker}(M)$ est $(Id - VEUT^T M)$, donc $A - VEUT^T Y = (Id - VEUT^T M)w$ pour tout $w \in \mathbb{R}^n$.