

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

On fixe un réel $a > 0$.

Si f est un élément de E , on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0$$

L'objectif du problème est de montrer qu'à tout élément f de E , on peut associer une unique solution g de (E_f) bornée sur I , puis d'étudier l'application $U : f \mapsto g$.

1. (a) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Ecrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$ et en déduire que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax} \left(K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt \right).$$

- (b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) bornée sur I , celle-ci est unique.

- (c) Vérifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$.

(d) Montrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) bornée sur I .

Dans la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. (a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

(b) Montrer que U est un endomorphisme de E .

(c) U est-il injectif?

(d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = U^{n-1} \circ U$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$.

3. (a) Pour k un nombre réel positif, et $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

(b) En déduire que pour tout $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, $\ker(U - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter $U^n(f_k)$. En déduire pour $x \in I$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f_k)](x)$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction de E définie par : $\varphi_n : x \mapsto x^n e^{-x}$. On note $\psi_n = U(\varphi_n)$.

(a) Pour $n \geq 1$, établir une relation entre ψ_n , φ_n et ψ_{n-1} .

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le sous-espace vectoriel F_p de E engendré par $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$.

(c) On prend ici $p = 2$. Ecrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme U restreint à F_2 . Calculer T_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Pour $f \in E$, montrer que $|U(f)| \leq U(|f|)$.

(b) On suppose que φ appartient à E et est à valeurs positives. Montrer que $\psi = U(\varphi)$ est à valeurs positives.

(c) Si de plus φ est décroissante, montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

6. On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) : f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'application qui à $f \in E_1$ associe f' .

(a) Pour $f \in E_1$, montrer que $aU(f) = f + U(f')$.

(b) En déduire que pour tout $f \in E_1$, $D(U(f)) = U(D(f))$.

7. Dans cette question, f est un élément de E , à valeurs positives, tel que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

On note $F : x \mapsto \int_1^x f(t) dt$, $g = U(f)$ et $G : x \mapsto \int_1^x g(t) dt$.

(a) Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.

(b) Justifier que la fonction F est un élément de E , et montrer qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \in I$,

$$G(x) = Ce^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}$$

(c) Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$ est bornée sur I .

(d) En déduire que $C = 0$ et que $G = U(F) - \frac{g(1)}{a}$.

(e) Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est une intégrale convergente.



2 Problème d'algèbre

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, n un entier naturel supérieur ou égal à 1, $\mathbb{R}$ le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On identifie un vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On peut définir l'endomorphisme f_M canoniquement associé à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$f_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & Mx \end{array}$$

On note $\text{Ker}(f_M)$ et $\text{Im}(f_M)$ respectivement le noyau et l'image de f_M . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique et $\| \cdot \|$ la norme associée.

Le problème est constitué de deux parties qui pourront être traitées de manière indépendante.

2.1 Première partie

Si λ est une valeur propre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note E_λ le sous-espace propre de $\mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ , c'est-à-dire le noyau de l'endomorphisme associé à la matrice $M - \lambda I_n$ noté $\text{Ker}(M - \lambda I_n)$ où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. Ainsi

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n : Mx = \lambda x\} = \text{Ker}(M - \lambda I_n).$$

On note alors $\sigma(M)$ le spectre de M , c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres complexes. Et $\rho(M)$ le rayon spectral de M , c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de M .

1. Dans cette question, on pose $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- (b) La fonction gradient de F est notée ∇F . Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^2$, $\nabla F(y) = Ay - b$.
- (c) En déduire que la fonction F admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
- (d) Écrire le développement limité de F en ce point critique.
- (e) En déduire que la fonction F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.

Un endomorphisme symétrique f de $\mathbb{R}^n$ est dit positif si, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle f(x), x \rangle \geq 0$.
 On dit de même qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à M est positif, et qu'elle est définie positive si ce même endomorphisme est défini positif, i.e. pour tout x de $\mathbb{R}^n$, x non nul, $\langle f(x), x \rangle > 0$.

2. (a) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
- (b) Montrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre $\sigma(M)$ est inclus dans $]0, +\infty[$.
3. On suppose dans cette question que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, que c est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad G(x) = \frac{1}{2} \langle Mx, x \rangle - \langle c, x \rangle.$$

- (a) Prouver que, pour tout couple (x, h) de vecteurs de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a : $\langle Mx, h \rangle = \langle Mh, x \rangle$.
- (b) On pose $\nabla G(y) = My - c$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Donner la forme de la fonction $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad G(x + h) = G(x) + \langle \nabla G(x), h \rangle + R(h).$$
- (c) On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x) \geq G(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En observant que $G(x_0 + th) \geq G(x_0)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\nabla G(x_0) = 0$.
4. On suppose que la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive.
 - (a) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $G(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} G(x)$, et le déterminer en fonction de M et c .
 - (b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ avec d non nul. Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $G(v - rd) = \inf_{s \in \mathbb{R}} G(v - sd)$.
 - (c) Exprimer r en fonction de v , d , M et c .

2.2 Deuxième partie

On note $L(\mathbb{K}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$. On note Π_f le polynôme minimal d'un endomorphisme $f \in L(\mathbb{K}^n)$ et $P_f(X) = \det(XI_n - f)$ son polynôme caractéristique. Un endomorphisme $f \in L(\mathbb{K}^n)$ est dit cyclique s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$C_a^p = \{a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$$

soit une partie génératrice de $\mathbb{K}^n$ de cardinal p , stable par f , c'est à dire :

- C_a^p est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$,
- C_a^p possède p éléments deux à deux distincts,
- $f(C_a^p) \subset C_a^p$.

Une telle partie C_a^p est nommée cycle de f au point a et on dit que f est cyclique d'ordre p .

5. (a) Pour quel(s) entier(s) $n \in \mathbb{N}$ non nul, un projecteur h de $L(\mathbb{K}^n)$ peut-il être cyclique ?
- (b) Comment s'écrit alors un cycle de h ?

6. On considère $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

(a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f .

(b) Déterminer le rang de f .

(c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

7. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ cyclique d'ordre p .

(a) Justifier que $p \geq n$.

(b) Montrer que f est au moins de rang $n - 1$.

8. Soit $f \in L(\mathbb{K}^n)$ un endomorphisme cyclique et C_a^n un cycle de f . Soit m le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F} = (a, f(a), \dots, f^{m-1}(a))$ soit libre.

(a) Prouver que $\forall k \geq m, f^k(a) \in \text{Vect}(\mathcal{F})$.

(b) En déduire que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

9. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f . Déterminer les valeurs (si elles existent) de x et y pour que f soit cyclique d'ordre 2.