ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
B.P. 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE L'EPREUVE DE CALCUL NUMERIQUE

EXERCICE

❶ $N = \sum_{i=1}^{i=10} n_i = 1000.$

❷ La moyenne empirique vaut : $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} n_i . x_i = 4540 \text{ F}.$

❸ La variance vaut : $\mathrm{V}x = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{10} n_i . (x_i - \overline{x})^2 = 2022400.$

❹ Coordonnées des points :

i	N'_i	Y'_i
1	0.01	0.0011
2	0.035	0.0093
3	0.141	0.0677
4	0.296	0.1872
5	0.659	0.5470
6	0.883	0.8184
7	0.958	0.9258
8	0.98	0.9621
9	0.998	0.9958
10	1	1

❺ Figure.

❻ Pour tout j on a : $0 \leq N'_j \leq 1$, $0 \leq Y'_j \leq 1$ donc la ligne de concentration est au dessus du segment OA et à gauche du segment AB. Pour montrer que la ligne est convexe, on compare la pente p_j du segment $C_{j-1}C_j$ et celle de C_jC_{j+1} notée p_{j+1}. On a :

$$p_j = \frac{Y'_j - Y'_{j-1}}{N'_j - N'_{j-1}} = \frac{\dfrac{n_j x_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}}.$$

Or $x_j < x_{j+1}$ donc $\dfrac{n_j x_j}{n_j} < \dfrac{n_{j+1} x_{j+1}}{n_{j+1}}$ d'où $\dfrac{\dfrac{n_j x_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_j}} < \dfrac{\dfrac{n_{j+1} x_{j+1}}{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}}{\dfrac{n_{j+1}}{\sum_{i=1}^{10} n_j}}$ c'est à dire $p_j < p_{j+1}$ donc la ligne est convexe. On en déduit qu'elle se trouve sous le segment OB. La ligne de concentration est donc à l'intérieur du triangle OAB.

❼ L'aire de OAB vaut 0,5.

❽ Figure.

❾ Le quadrilatère est un trapèze car $C_{j-1}D_{j-1}$ et C_jD_j sont parallèles, leurs points ayant les mêmes abscisses deux à deux. L'aire a_j vaut donc :

$$a_j = \frac{N'_{j-1}+N'_j-Y'_{j-1}-Y'_j}{2}(N'_j-N'_{j-1}).$$

❿ L'aire demandée est la somme des aires a_j calculées précédemment, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
aire &= \sum_{j=1}^{10} a_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(N'_{j-1}+N'_j)(N'_j-N'_{j-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)(N'_j-N'_{j-1}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(N'^2_j-N'^2_{j-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)\frac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i} \\
&= \frac{1}{2}(N'^2_{10}-N'^2_0) - \frac{1}{2\sum_{i=1}^{10} n_i}\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)n_j \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)\frac{n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}\right).
\end{aligned}$$

❶❶ Donc $I = 1-\frac{\sum_{j=1}^{10}(Y'_{j-1}+Y'_j)n_j}{\sum_{i=1}^{10} n_i}$. Application numérique : I = 0,168.

❶❷ Si tous les salaires étaient égaux, alors ils seraient tous dans une classe j fixée. On aurait alors $C_0 = ... = C_{j-1} = O$ et $C_j = ...C_{10} = B$ donc la ligne de concentration serait la droite OB et l'indice serait nul $I = 0$.

❶❸ On aurait alors $C_0 = O$ $C_1 = ... = C_9$ de coordonnées $(\frac{N-1}{N},0)$ et $C_{10}=B$. On a alors $I = 1-\frac{1}{N}$.

❶❹ Figure

❶❺ $I_\alpha = 1 - 2\int_0^1 f_\alpha(x)dx = 1 - 2.[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$.

❶❻ On a $I_\alpha = 0{,}168$ si $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 0{,}168$ c'est à dire α = 1,404.

Figure :

EXERCICE

❶ Les différentes racines n'ont de sens que si : $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ 0 < x \leq a^2 \end{cases}$ ou si a = 0 et x = 0.

Dans ces conditions, on a l'équation équivalente en élevant tout au carré : $2a + 2\sqrt{a^2 - x} = \sqrt{bx}$.

En relevant au carré on a encore l'équation équivalente : $4a^2 + 8a\sqrt{a^2 - x} + 4(a^2 - x) = bx$ soit encore : $8a\sqrt{a^2 - x} = (b+4)x - 8a^2$. Cette équation équivaut à :

$$\begin{cases} 64a^2(a^2 - x) = ((b+4)x - 8a^2)^2 \\ (b+4)x - 8a^2 \geq 0 \end{cases} \text{ soit,}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{16a^2 b}{(b+4)^2} \\ x \geq \dfrac{8a^2}{b+4} \end{cases}$$

Les conditions deviennent alors :

$$\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \\ \dfrac{8a^2}{b+4} \leq \dfrac{16a^2b}{(b+4)^2} \leq a^2 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $a > 0$ et $b \geq 4$., auquel cas la solution est $x = \dfrac{16a^2b}{(b+4)^2}$.

❷ Application : x = 2,277.